Théorie de la mesure et intégration.

J.C. Pardo

Feuille de TD 7.

Exercices.

Exo. 96 Soit λ_n la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ (produit de λ_1 n fois avec elle même). Soit

$$B_n = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\Big\},$$

and

$$S_n = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\Big\}.$$

a) Soit α dans $\mathbb{R}_+^*$, montrer que $\lambda \mapsto \lambda_n(\alpha A)$ est une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n))$ et que cette mesure n'est autre que $\alpha^n \lambda_n$.

b) Soit α, β tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$; on a

$$S_{n-1} \subset (\beta B_n) \cap (\alpha B_n)^c.$$

En déduire la valeur de $\lambda_n(S_{n-1})$.

Exo. 97 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application borélienne.

a) Montrer que $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (f(x), y)$ est borélienne et en déduire que

$$\Gamma_g = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) = y\Big\}$$

est un borérilen de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

b) Montrer que $\lambda_{n+1}(\Gamma_g) = 0$.

Exo. 98 Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que: $V \neq \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que $\lambda_{n+1}(V) = 0$.

Exo. 99 Soit $P(X, Y)$ un polynôme en deux variables, non constante, à coefficients réels et

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0\},$$

courbe algébrique définie par l'équation $P = 0$. Montrer que $\lambda_2(C) = 0$.

Exo. 100 Soit S un borélien de $\mathbb{R}^2$, h un réel positif, C le cône de $\mathbb{R}^3$ de sommet $\Omega = (0, 0, h)$, de base $S \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ limité pour le plans $z = 0$ et $z = h$ (C = ensemble des segments ΩM où M parcourt $S \times \{0\}$). Calculer $\lambda_3(C)$ en fonction de h et de $\lambda_2(S)$. (Montrer d'abord que C est un borélien).

Exo. 101 Soient $A_1, \ldots, A_p$ des points de $\mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i > 0$.

a) Rappeler la définition du barycentre G des points A_i affectés des masses α_i.

b) Traduire cette définition en termes d'intégrales pour la mesure

$$m = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_{A_i}$$

où δ_{A_i} es la mesure de Dirac au point A_i.

c) Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^n$ et sa tribu borélienne. Enoncer des conditions suffisantes pour qu'on puisse définir un barycentre de μ, vue comme répartition de masse, et donner cette definition.

d) Exemple: Calculer les coordonnées du cntre de gravité de μ lorsque μ est la mesure de densité $\mathbb{1}_K$ par rapport á λ_3, où

$$K = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \text{ et } x_3 \geq 0\Big\},$$

(centre de gravité d'une demi-boule homogéne). (Pour calculer les intégrales, utiliser le Théorème de Fubini d'une part et d'autre part, le Théorème du changement de variable sur $\mathbb{R}$ seulement, c'est à dire en un seule variable).

Exo. 102 Pour quels réels α l'intégrale

$$I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\{-x^2 - \alpha xy - y^2\} \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$$

est-elle finie? La calculer dans ce cas. (Réduire la forme quadratique, appliquer le Théorème de Fubini). On peut admetre que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Exo. 103 Pour les valeurs de α trouvée en (102), calculer

$$g_\alpha(s,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\{i(sx + ty)\} \exp\{-x^2 - \alpha xy - y^2\} \mathrm{d}\lambda_2(x,y),$$

pour $s, t \in \mathbb{R}$ On peut admettre que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\{isx\} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \exp\{-s^2/4\}.$$

Au moyen du Théorèm de changement de variable pour $x + (\alpha/2)y = u$, $\sqrt{1 - \alpha^2/4}\,y = v$, montrer que

$$g_\alpha(s,t) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2/4}} g_0\left(s, \frac{t - \alpha s/2}{\sqrt{1-\alpha^2/4}}\right).$$

Exo. 104 Calculer l'intégrale
$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-xy},$$
au moyen du changement de variable $x = (u-v)/\sqrt{2}, y = (u+v)/\sqrt{2}$.
Exo. 105 Sur $\mathbb{R}^n$ on défint la norme $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \mapsto ||x|| = \sup\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ et soit α un réel. Soit
$$I_\alpha = \int_D \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}{||x||^\alpha}.$$
Calculer I_α.
Exo. 106 A l'aide du changement de variables: $x = \sqrt{vw}, y = \sqrt{uw}, z = \sqrt{uv}$, calculer la mesure de Lebesgue de
$$\Big\{(u,v,w) \in R^3 : u,v,w > 0 \text{ et } uv + uw + vw < 1\Big\}.$$
Etudier les propriétés de
$$\phi : (\mathbb{R}_+^*)^3 \to (\mathbb{R}_+^*)^3 : (u,v,w) \mapsto (\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv}).$$
Exo. 107 Soit $f = 1\!\!1_{[-1,1]}$. Calculer le produit de convolution $f * f$.
Exo. 108 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$. Montrer que $f * 1\!\!1_{[0,1]}$ est continue. Montrer qu'il n'existe pas f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$ qui soit un élément neutre pour le produit de convolution dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$, c'est à dire tel que $f*g(x) = g(x)$ pour tout x, pour tout g dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$.
Exo. 109 Pour $\alpha > 0$, soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x^2/\alpha^2}$. Calculer $f_\alpha * f_\beta$. On rappelle que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$
Exo. 110 Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ et $f = 1\!\!1_B$. Calculer $1\!\!1_B * 1\!\!1_B$.
Exo. 111 Soit $f = 1\!\!1_{[-1,1]}$, pour $n \geq 2$, montrer que f^{*n} est de classe C^{n-2}.
Exo. 112 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues à support compacts. Montrer que $f * g(x)$ est définie pour tout x, que $x \mapsto f * g(x)$ est continue à support compact et que pour tout x on a
$$|f * g(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} = ||f||_2||g||_2.$$
Exo. 113 Généralisation des exercises (102) et (103). Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. En écrivant les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme de matrices colonnes, on a: $q(x) = x^tAx$, où A est une matrice symétrique réelle, x^t la matrice ligne transposée de x.

a) On suppose que A est une matrice diagonale, c'est à dire $q(x) = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i x_i^2$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-q(x)}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue si et seulement si q est définie positive, c'est à dire qu'on a $\forall i, \alpha_i > 0$.

b) En général, on sait qu'il existe P, matrice orthogonal $P^t = P^{-1}$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit diagonale. Calculer

$$\int e^{-q(x)} \mathrm{d}\lambda_n(x),$$

au moyen de changement de variable $x = Py$. Montrer que cette intégrale est finie si et seulement si q est définie positive.

c) On suppose q définie positive, si $v \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$f(x) = e^{-q(x)} \qquad \text{et} \qquad \hat{f}(u) = \int_{R^n} e^{iu^t x} e^{-q(x)} \mathrm{d}\lambda_n(x).$$

Comme en (b), utiliser le changement de variable $x = Py$ pour calculer $\hat{f}$. On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}.$$

Exo. 114 Sur l'ensemble $]0, \infty[\times]0, \infty[$ on définit une fonction F par

$$F(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

et, pour $y > 0$, on note F_y la focntion partielle $x \mapsto F(x, y)$ de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$. Dans le problème posé, on peut utiliser une primitive explicite de F_y mais cela n'est absolument pas nécesaire.
On pose $A =]0, 1[\times]0, 1[$ et $B = [1, \infty[\times]0, 1[$.

a) Montrer que F est intégrable sur B (pour la mesure de Lebesgue) et que l'intégrale

$$\int_B F(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

est estrictement positive.

b) Montrer que, pour tout $y \neq 0$, F_y est intégrable et d'intégrale nulle sur $]0, \infty[$. On purra utliser le changemente de variable $x = y^2/t$.

c) Montrer que l'intégrale double

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 F(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

est définie et strictemente négative. La fonction F est-elle intégrable sur A (pour la mesure de Lebesgue)?

Exo. 115 On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ où μ est une mesure positive finie. On fixe une fonction f mesurable de X dans $[0, \infty[$ et on définit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\alpha(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$.

a) Prouver que α est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

b) Justifier la relation

$$\int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_0 \infty\alpha(t)\mathrm{d}t.$$

Indication: on pourra utiliser le théorème de Fubini pour la fonction $(x,t) \mapsto g(f(x),t)$, où $g(u,v) = 1$ si $u > v$ et 0 si $u \leq v$.