Sobre un Teorema de Kakutani vía Martingalas

Jesús Daniel Arroyo Relión*

1. Preliminares

El *teorema de Kakutani* es un importante resultado de la teoría de la medida. Fue demostrado en 1946 por Shizuo Kakutani. Este teorema investiga condiciones de equivalencia y ortogonalidad de dos medidas sobre un mismo espacio. En este trabajo se estudiarán aplicaciones de martingalas, especialmente, se verá una demostración del teorema de Kakutani usando esta herramienta.

2. Esperanza condicional

2.1. El teorema de Radon-Nikodym

Empezaremos esta sección enunciando uno de los teoremas que nos serán más útiles a lo largo de este trabajo. El *teorema de Radon-Nikodym* establece la existencia de una representación integral de una medida absolutamente continua con respecto a otra. Este teorema fue demostrado en 1913 por Johann Radon para el caso particular cuando el espacio es $\mathbb{R}^n$, y Otto M. Nikodym, quien lo extendió al caso general en 1930. Primero, definamos el concepto de *continuidad absoluta.*

Definición 1. *Sea Ω un conjunto, $\mathscr{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, y $\mu, \nu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dos medidas. Se dice que ν es* absolutamente continua *respecto a μ (denotado $\nu \ll \mu$) si $\nu(F) = 0$ siempre que $\mu(F) = 0$, para $F \in \mathscr{F}$.*

Si el espacio es de medida finita (como en un espacio de probabilidad), la definición anterior es equivalente a pedir que para toda $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que si $\mu(F) < \delta$, entonces $\nu(F) < \epsilon$. Para verificar que lo anterior implica la definición 1, basta notar que si $\mu(F) = 0$, entonces $\mu(F) < \delta$, $\forall\delta > 0$, por lo que $\nu(F) < \epsilon$. El reverso de este resultado se puede verificar facilmente a partir del teorema de Radon-Nikodym.

Teorema 1 (Radon-Nikodym)**.** *Sea $(\Omega, \mathscr{F})$ un espacio medible, con dos medidas μ y ν σ-finitas, y $\nu \ll \mu$. Entonces, existe una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que es $\mathscr{F}$-medible, tal que*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \quad \forall E \in \mathscr{F}$$

*Trabajo realizado para el IV Verano de Probabilidad y Estadística dirigido por el Dr. Víctor Pérez-Abreu.

Existen varias pruebas de este teorema. En la sección 4 se verá una demostración por medio de martingalas.

Usando la caracterización de las medidas absolutamente continuas, podemos terminar de probar la equivalencia de las definiciones. Si para alguna $\epsilon > 0$, existe una sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{F}$ tales que $\mu(F_n) < \frac{1}{2^n}$ y $\nu(F_n) \geq \epsilon$, entonces, si $H = \limsup F_n$, $\mu(H) = 0$. Si las medidas fueran absolutamente continuas, por el teorema de Radon-Nikodym tenemos que $\nu(H) = \lim \int f I_{F_n} \, d\mu = 0$, ya que $I_{F_n} \to 0$ c.d., y el teorema de Convergencia Dominada nos permite cambiar el límite con la integral. Como habíamos visto que $\nu(H) \geq \epsilon$, llegamos a una contradicción, lo que nos lleva a asumir que las dos definiciones son equivalentes.

2.2. Definición de esperanza condicional

Definición 2 (Esperanza Condicional)**.** *Sea X una variable aleatoria integrable en el espacio $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ una σ-álgebra . Definimos $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ como la variable aleatoria, que llamaremos el* valor de la esperanza condicional *de X dado $\mathscr{G}$, que cumple las propiedades*

(I) $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ *es $\mathscr{G}$-medible.*

(II) *Se cumple la ecuación*

$$\int_G \mathbb{E}[X|\mathscr{G}] \, d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}, \quad \forall G \in \mathscr{G}.$$

El teorema de *Radon-Nikodym* nos garantiza que esta variable aleatoria $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ está bien definida. Para ver ésto, analizemos dos casos. Supongamos $X \geq 0$. Si definimos una medida $\mathbb{Q}$ en $\mathscr{G}$ como $\mathbb{Q}(G) = \int_G X d\mathbb{P}, \forall G \in \mathscr{G}$, ésta es finita (al ser X integrable). Además, tenemos que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Por lo tanto, por el teorema de Radon-Nikodym, existe una variable aleatoria f que cumple las dos propiedades requeridas en la definición. Entonces $f = \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$. Si X no es no-negativa pero integrable, basta con tomar X^+ y X^-, y entonces $\mathbb{E}[X^+|\mathscr{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathscr{G}]$ cumple con las propiedades requeridas.

De la definición se deriva que la variable aleatoria $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ es integrable. Usando la propiedad (II), al ser X integrable, tenemos que

$$\int_\Omega \mathbb{E}[X|\mathscr{G}] \, d\mathbb{P} = \int_\Omega X d\mathbb{P} < \infty.$$

Para cada σ-álgebra $\mathscr{G}$ pueden existir muchas variables aleatorias que cumplan con las propiedades de la definición, sin embargo, éstas son iguales casi seguramente (ya que $\int_G f \, d\mathbb{P} = \int_G g \, d\mathbb{P} \; \forall G \in \mathscr{G} \Rightarrow f = g$ c.d). Así, tenemos los casos en que $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, por lo que $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$ c.s., y si $\mathscr{G} = \mathscr{F}$, entonces $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = X$ c.d.

Si $B_1, B_2, \ldots$ es una partición a lo mas numerable de Ω que genera $\mathscr{G}$, entonces, como $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ es $\mathscr{G}$-medible, debe ser constante en cada B_i. Por lo tanto, si el valor de $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ en B_i es α_i, usando la segunda característica de la definición, tenemos que

$$\int_{B_i} \mathbb{E}[X|\mathscr{G}] \; d\mathbb{P} = \alpha_i \mathbb{P}(B_i),$$

de donde, si $\mathbb{P}(B_i) = 0$,

$$\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]_\omega = \frac{1}{\mathbb{P}(B_i)} \int_{B_i} X \, d\mathbb{P}, \quad \omega \in B_i,$$

y si $\mathbb{P}(B_i) = 0$, el valor de α_i es arbitrario (esto sigue conservando la igualdad casi dondequiera de $\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$). En particular, este resultado es importante porque nos da una fórmula explicita en el caso de las variables aleatorias discretas.

Si Y es una variable aleatoria y $\sigma(Y)$ la σ-álgebra generada por Y, se denotará a $\mathbb{E}\left[X|\sigma(Y)\right]$ como $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$.

2.3. Propiedades de la esperanza condicional

Teorema 2. *Sean Ω un conjunto, $\mathscr{G}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, X, Y variables aleatorias, y $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias. Entonces*

(I) *Si $X = a$ c.s., entonces $\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] = a$ c.s.*

(II) *Para $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[aX + bY|\mathscr{G}\right] = a\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] + b\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$ c.s.*

(III) *Si $X \leq Y$ c.s., entonces $\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right]$ c.s.*

(IV) $|\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]| \leq \mathbb{E}\left[|X||\mathscr{G}\right]$ *c.s.*

(V) *Si $X_n \to X$ c.s., y existe Y integrable tal que $|X_n| \leq Y$ c.s. $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_n \mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right] = \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$ c.s.*

(VI) *(Convergencia Monótona) Si $0 \leq X_n \uparrow X$, entonces $\mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right] \uparrow \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$ c.s.*

(VII) *(Lema de Fatou) Si $X_n \geq 0$, entonces $\mathbb{E}\left[\liminf X_n|\mathscr{G}\right] \leq \liminf \mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right]$.*

(VIII) *(Convergencia Dominada) Sea Y una variable aleatoria integrable tal que $|X| \leq Y$. Si $X_n \to X$ c.s., entonces $\mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}|\right] \to \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$ c.s.*

(IX) *(Desigualdad de Jensen) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa tal que $\mathbb{E}\left[|f(X)|\right] < \infty$. Entonces $\mathbb{E}\left[f(X)|\mathscr{G}\right] \geq f\left(\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]\right)$.*

Demostración. (I) Si $X = a$ c.s., la función $\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] = a$ satisface las dos condiciones de la definición de Esperanza condicional, y por su unicidad c.s. se tiene el resultado.

(II) Como $a\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] + b\mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right]$ es $\mathscr{G}$-medible e integrable (ya que los dos términos lo son), y se cumple que

$$\begin{aligned}
\int_G \left(a\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] + b\mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right]\right) \, d\mathbb{P} &= a \int_G \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] + b \int_G \mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right] \\
&= a \int_G X \, d\mathbb{P} + b \int_G Y \, d\mathbb{P} \\
&= \int \left(aX + bY\right) \, d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

para todo $G \in \mathscr{G}$, esta función satisface las propiedades de la definición.

(III) De los supuestos, tenemos que $\int_G X\, d\mathbb{P} \leq \int_G Y d\mathbb{P}$, de donde

$$\int_G \left(\mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right] - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]\right) d\mathbb{P} \geq 0, \quad \forall G \in \mathscr{G}.$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right] - \mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right] \geq 0$ c.s. (si en alguna $G \in \mathscr{G}$ no se cumpliera esto, por medibilidad $\left[\mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right] - \mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right] < 0\right] \in \mathscr{G}$, y la integral sobre este conjunto sería negativa), de donde tenemos lo buscado.

(IV) Como $-|X| \leq X \leq |X|$, tenemos que $-\mathbb{E}\left[|X||\mathscr{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X||\mathscr{G}\right]$, por las propiedades anteriores, y claramente esto implica lo buscado.

(V) Si tomamos $Z_n = \sup_{k \leq n} |X - X_k|$, sabemos que $Z_n \downarrow 0$ c.s. (por la convergencia de X_n). Además, por la propiedad anterior, se cumple que

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] - \mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[X - X_n|\mathscr{G}\right]\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left[|X - X_n|\,|\mathscr{G}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[Z_n|\mathscr{G}\right], \end{aligned}$$

por lo que basta ver que $\mathbb{E}\left[Z_n|\mathscr{G}\right] \to 0$ c.s. Al ser (Z_n) una sucesión no creciente, por la propiedad *(iii)* del teorema, la sucesión $\left(\mathbb{E}\left[Z_n|\mathscr{G}\right]\right)_{n=1}^{\infty}$ es también no creciente, y al estar acotada por debajo por 0, el límite existe c.s. Sea $Z = \lim_n \mathbb{E}\left[Z_n|\mathscr{G}\right]$, claramente $Z \geq 0$. Usando que $\mathbb{E}\left[Z\right] = \int \mathbb{E}\left[Z|\mathscr{G}\right] d\mathbb{P} \leq \int \mathbb{E}\left[Z_n|\mathscr{G}\right] d\mathbb{P}, \forall n \in \mathbb{N}$, y como $0 \leq Z_n \leq 2Y$, por el teorema de Convergencia Dominada tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Z\right] &\leq \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{E}\left[Z_n|\mathscr{G}\right] d\mathbb{P} \\ &= \int \lim_{n\to\infty} Z_n\, d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} Z_n\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que $Z_n \to 0$ c.s., y al ser Z positivo, debe ser igual a 0 para cumplir con lo anterior. Por lo tanto, se tiene el resultado buscado.

(VI) Como $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente, entonces $\left(\mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right]\right)_{n=1}^{\infty}$ también es una sucesión creciente. Sea $Y_n = \mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right]$. Por monotonía, $Y_n \uparrow Y = \limsup Y_n$. Para $G \in \mathscr{G}$, se tiene que

$$\lim_n \int_G X_n\, d\mathbb{P} = \int_G X\, d\mathbb{P},$$

por el teorema de Convergencia Monótona. Usando el mismo argumento

$$\lim_n \int_G X_n\, d\mathbb{P} = \lim_n \int_G Y_n\, d\mathbb{P} = \int_G Y\, d\mathbb{P}.$$

por lo que $\int_G X\ d\mathbb{P} = \int_G Y\ d\mathbb{P}$ para toda $G \in \mathscr{G}$, por lo que $Y = \text{lím}_n \mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right]$ es una versión de $\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$.

(VII) Para cada $G \in \mathscr{G}$, el lema de Fatou original nos asegura que

$$\int_\Omega \text{lím inf}\, X_n I_G\ d\mathbb{P} \leq \text{lím inf} \int_\Omega X_n I_G\ d\mathbb{P}.$$

Por lo tanto, como se cumple para toda Ω, se cumple para la esperanza condicional.

(VIII) El inciso anterior nos asegura que

$$\mathbb{E}\left[Y - X|\mathscr{G}\right] \leq \text{lím inf}\left(\mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right] - \mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right]\right),$$

$$\mathbb{E}\left[Y + X|\mathscr{G}\right] \leq \text{lím inf}\left(\mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right] + \mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right]\right).$$

De restar las dos ecuaciones anteriores, se obtiene que

$$\text{lím sup}\,\mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right] \leq \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right],$$

$$\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] \leq \text{lím inf}\,\mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right],$$

pero $\text{lím inf}\,\mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right] \leq \text{lím sup}\,\mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right]$. Por lo tanto $\text{lím}\,\mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{G}\right] = \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$.

(IX) Sean $(a_n)_{n=1}^\infty$ y $(b_n)_{n=1}^\infty$ dos sucesiones de números reales tales que $f(x) = \sup_n (a_n x + b_n)$. Podemos asegurar que estas sucesiones existen por la convexidad de f. Por lo tanto, $a_n X + b_n \leq f(X)$, y de los incisos (II) y (III) tenemos que

$$a_n \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] + b_n \leq \mathbb{E}\left[f(X)|\mathscr{G}\right].$$

Calculando el supremo en ambos lados de la ecuación, se tiene el resultado deseado.

□

Las propiedades anteriores son una extensión de las propiedades de la integral para la esperanza condicional. A continuación, se presentarán algunas características propias de la esperanza condicional, que facilitarán su cálculo.

Teorema 3. *Sean X una variable aleatoria $\mathscr{G}$-medible, Y una variable aleatoria integrable, tales que XY es integrable. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[XY|\mathscr{G}\right] = X\mathbb{E}\left[Y|\mathscr{G}\right] \quad c.s. \tag{2.1}$$

Demostración. Primero veamos el caso en que $X = I_{G_0}$, para $G_0 \in \mathscr{G}$. Claramente $I_{G_0}\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]$ es $\mathscr{G}$-medible, y como las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\int_G I_{G_0}\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]\ d\mathbb{P} &= \int_{G\cap G_0} \mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]\ d\mathbb{P} \\
&= \int_{G\cap G_0} Y\ d\mathbb{P} \\
&= \int_G I_{G_0} Y\ d\mathbb{P} \\
&= \int_G \mathbb{E}[I_{G_0}Y|\mathscr{G}]\ d\mathbb{P},
\end{aligned}$$

$\forall G \in \mathscr{G}$, lo que implica que $I_{G_0}\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[I_{G_0}Y|\mathscr{G}]$ c.s. Usando las propiedades de linealidad del Teorema 2, podemos extender la ecuación (2.1) para funciones simples. Sea ahora $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples tales que $|X_n| \leq |X|\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim X_n = X$. Entonces $|X_nY| \leq |XY|$, y al ser XY integrable, tenemos que $\lim_n \mathbb{E}[X_nY|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[XY|\mathscr{G}]$ c.s., pero $\mathbb{E}[X_nY|\mathscr{G}] = X_n\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]\ \forall n \in \mathbb{N}$ al ser una sucesión de funciones simples, por el caso anterior. Entonces $\mathbb{E}[XY|\mathscr{G}] = \lim_n X_n\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]$ que era lo buscado. □

Algo de notar en el teorema anterior es que no se pide que X sea integrable. Un ejemplo particular de este teorema es que si X es $\mathscr{G}$-medible, entonces $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = X$ c.s.

Teorema 4. *Sea X una variable aleatoria, y $\mathscr{F}$,$\mathscr{G}$ dos σ-álgebras de subconjuntos de Ω tales que $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$. Entonces*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}]|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\ \ c.s.$$

Demostración. Como $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ es $\mathscr{G}$-medible, basta verificar que $\int_G \mathbb{E}[X|\mathscr{F}]\ d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\ d\mathbb{P}, \forall G \in \mathscr{G}$. Por un lado, como $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, para $G \in \mathscr{G}$ se tiene que $G \in \mathscr{F}$, y por la definición de esperanza condicional,

$$\int_G \mathbb{E}[X|\mathscr{F}]\ d\mathbb{P} = \int_G X\ d\mathbb{P}, \quad \forall G \in \mathscr{G}.$$

Por otro lado,

$$\int_G \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\ d\mathbb{P} = \int_G X\ d\mathbb{P}, \quad \forall G \in \mathscr{G}.$$

De las dos igualdades se tiene el resultado buscado. □

El siguiente teorema dice que podemos simplificar el cálculo de la esperanza condicional a una función que cumpla las propiedades de la definición en un conjunto mas pequeño que la σ-álgebra $\mathscr{G}$.

Definición 3. *Sea Ω un conjunto, y $\mathcal{P}$ un subconjunto del conjunto potencia de Ω. Entonces $\mathscr{P}$ es un π-sistema sí*

1. $\mathcal{P}$ es no vacío.

2. Si $E, F \in \mathcal{P}$, entonces $E \cap F \in \mathcal{P}$.

Teorema 5. *Sean $\mathscr{G}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathcal{P}$ un π-sistema tal que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathscr{G}$. Una función f integrable cumple que $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = f$ c.s. si es $\mathscr{G}$-medible, y además*

$$\int_G f \, d\mathbb{P} = \int_G X \, d\mathbb{P}, \quad \forall G \in \mathcal{P}.$$

2.4. Definiciones alternativa

La definición 2, como se mencionó, requiere del teorema de Radon-Nikodym para garantizar la existencia de dicha variable aleatoria. Sin embargo, existen definiciones alternativas que no hacen uso de este teorema. Esto nos permitirá, entre otras cosas, dar una demostración del teorema de Radon-Nikodym donde la esperanza condicional juega un papel sustancial, al hacer uso de *martingalas*. Para construir una definición de esperanza condicional, primero la definiremos para funciones $(\mathscr{G}, \mathscr{G}')$-simples, las cuales explicaremos a continuación.

Definición 4. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria. X es $(\mathscr{G}, \mathscr{G}')$-simple si existen n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{G}'$ tales que forman una partición de Ω, y $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias $\mathscr{G}$-medibles, tales que*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i I_{A_i}.$$

Las variables aleatorias $(\mathscr{G}, \mathscr{G}')$-simples son una generalización de las simples, ya que si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ (la σ-álgebra mas pequeña) y $\mathscr{G}' = \mathscr{F}$, es lo mismo que definir una variable aleatoria simple. Con esto, enunciemos la definición de esperanza condicional para este tipo de variables aleatorias.

Definición 5. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ una σ-álgebra, y sea X una variable aleatoria $(\mathscr{G}, \mathscr{G}')$-simple. Definimos la esperanza condicional de X dado $\mathscr{G}$ como*

$$\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{P}(A_i).$$

Como sabemos, si X es una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ existe una sucesión de funciones simples que converge a X. Este resultado se puede generalizar para funciones $(\mathscr{G}, \mathscr{G}')$-simples

Definición 6. *Sea X una variable aleatoria no negativa e integrable en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Sea $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Definimos una versión de la esperanza condicional de X dado $\mathscr{G}$ como*

$$\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = \sup\{\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] : Y \geq 0 \text{ es } (\mathscr{F}, \mathscr{G})\text{-simple y acotada, } Y \leq X\}.$$

Si X es variable aleatoria no necesariamente no negativa, tomamos las variables no negativas X^+ y X^- y definimos

$$\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] = \mathbb{E}\left[X^+|\mathscr{G}\right] - \mathbb{E}\left[X - |\mathscr{G}\right].$$

Para el caso de variables aleatorias en el espacio $\mathcal{L}_2$, existe otra definición alternativa de esperanza condicional, como una proyección en un subespacio de $\mathcal{L}_2$. Para esto, recordemos que en este espacio, el producto interior está definido como

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}\left[XY\right], \tag{2.2}$$

y la norma (caso general) como

$$\|X\|_{\mathcal{L}_p} = \mathbb{E}\left[X^p\right]^{\frac{1}{p}} \tag{2.3}$$

con $p = 2$.

También recordemos que $\mathcal{L}_2$ es un espacio de Hilbert, y a través del producto interior y la norma podemos definir proyecciones en subespacios de $\mathcal{L}_2$.

Definición 7. *Sea $X \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Sea $\mathscr{G} \subset F$ una σ-álgebra. Definimos $\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$ como la proyección ortogonal de X en $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$.*

Recordemos que la proyección ortogonal de un vector X sobre un subespacio vectorial es el vector más cercano a X en el subespacio vectorial. El siguiente teorema nos dice que las definiciones 2 y 7 son equivalentes.

Teorema 6. *Sea X una variable aleatoria en $\mathcal{L}_2\left(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\right)$, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ una σ-álgebra, y $\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$ como en la definición 2. Entonces, se cumple que*

$$\mathbb{E}\left[(X - Z)^2\right] \geq \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])^2\right], \quad \forall Z \in \mathcal{L}_2\left(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P}\right).$$

Además, la igualdad se da sí y sólo sí $Z = \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$.

Demostración. Primero, observemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(X - Z)^2\right] &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] + \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] - Z)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])^2\right] + \mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])^2\right] \\ &\quad -2\mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right)(X - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])\right]\right]. \end{aligned}$$

Ahora, como $Z - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$ es $\mathscr{G}$-medible, usando el Teorema 2.1

$$\mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])(X - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])|\mathscr{G}\right] = (Z - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right)\right]|\mathscr{G}\right],$$

y obteniendo la esperanza de ambos lados de la ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])(X - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])(X - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])|\mathscr{G}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right)\right]|\mathscr{G}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])(\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right] - \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[(X-Z)^2\right] = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])^2\right] + \mathbb{E}\left[(Z-\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])^2\right] \geq \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])^2\right].$$

Para que la igualdad se de, se tiene que cumplir

$$\mathbb{E}\left[(Z-\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])^2\right] = 0,$$

que se cumple sí y sólo sí $Z = \mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right]$ c.s. $\square$

3. Martingalas

Definición 8. *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias y* $(\mathscr{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de* σ*-álgebras, tal que* $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}, \forall n \in \mathbb{N}$. *La sucesión* $\{(X_n, \mathscr{F}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *es una* martingala *si se cumple*

(I) $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(II) X_n *es* $\mathscr{F}_n$*-medible.*

(III) $X_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

(IV) $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = X_n$ *c.s.* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si sustituimos la propiedad (iv) por

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \leq X_n$$

con probabilidad 1, entonces se dice que la sucesión es una supermartingala. *Y, si la propiedad (iv) es sustituida por*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \geq X_n$$

con probabilidad 1, la sucesión $\{(X_n, \mathscr{F}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *es una* submartingala.

Si la sucesión $\{(X_n, \mathscr{F}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una martingala, también se dice que (X_n) es una martingala con respecto a $(\mathscr{F}_n)$. Cuando no se da explicitamente la sucesión de σ-álgebras, se refiere a la σ-álgebra definida por las variables aleatorias X_n, es decir, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

3.1. Ejemplos de martingalas

Ejemplo 1. *Sea* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes, tales que* $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ *y* $\mathbb{E}[X_n] = 0$*, para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Sean* $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$*, y* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Entonces la sucesión* $(S_n, \mathscr{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ *es martingala. Las propiedades (i) y (ii) de la definición son claras. La propiedad (iii) es consecuencia de la desigualdad del triángulo, y las propiedades de conservación de las desigualdades de las esperanzas. Para la última propiedad, tenemos que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[S_n|\mathscr{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \\
&= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] \\
&= S_n,
\end{aligned}$$

lo último obtenido del hecho de que S_n *es* $\mathscr{F}_n$*-medible y el Teorema 3, y de que* X_{n+1} *es independiente de* $\mathscr{F}_n$.

Ejemplo 2. *El siguiente ejemplo es de particular importancia en este trabajo ya que una martingala de este tipo será utilizada para la demostración del teorema de Kakutani. Sea* (X_n) *una sucesión de variables aleatorias independientes no negativas, tales que* $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ *y* $\mathbb{E}[X_n] = 1$*, y definimos* $(\mathscr{F}_n)$ *como en el ejemplo anterior. Definimos* $M_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$*. Entonces la sucesión* $\{(M_n, \mathscr{F}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *es una martingala. Las propiedades (i) a (iii) son triviales. La última propiedad es cierta, ya que*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}M_n|\mathscr{F}_n] \\ &= M_n\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \\ &\quad \textit{(por el Teorema 3)} \\ &= M_n\mathbb{E}[X_{n+1}] \\ &\quad \textit{(por independencia de } X_{n+1} \textit{ y } \mathscr{F}_n\textit{)} \\ &= M_n \end{aligned}$$

Ejemplo 3. *Sea* Z *una variable aleatoria integrable, y* $(\mathscr{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de* σ*-álgebras creciente. Entonces, si definimos*

$$X_n = \mathbb{E}[Z|\mathscr{G}_n], \ n \in \mathbb{N}$$

tenemos que la sucesión $(X_n, \mathscr{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una martingala. Las primeras 3 propiedades de una martingala claramente se cumplen por la forma en que está definido. La propiedad (iv) se verifica ya que*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{G}_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|\mathscr{G}_{n+1}]|\mathscr{G}_n] \\ &= \mathbb{E}[Z|\mathscr{G}_n] \\ &= X_n, \end{aligned}$$

usando el Teorema 4.

3.2. Teoremas de convergencia

Sea $[\alpha, \beta]$ un intervalo. En general, para una sucesión de variables aleatorias, podemos contar el número de veces que una trayectoria cruza ese intervalo. Por un cruce, nos referimos a la variable aleatoria a un tiempo τ_1 se encuentre debajo de α, y para algún tiempo $\tau_2 > \tau_1$ se encuentre por arriba de β. Mas formalmente lo podemos definir como sigue.

Definición 9 (Cruce)**.** *Sean* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *variables aleatorias. Para un intervalo* $[\alpha, \beta]$*, definimos inductivamente la sucesión de tiempos* $(\tau)_{i=1}^{\infty}$ *como sigue*

$$\tau_1 = \min\{n, \min\{j : X_j \leq \alpha, j \in \mathbb{N}\}\},$$

$$\tau_k = \begin{cases} \min\{n, \min\{j : j > \tau_{k-1}, X_{\tau_k} \geq \beta\}\} & \textit{si } k \textit{ es par,} \\ \min\{n, \min\{j : j > \tau_{k-1}, X_{\tau_k} \leq \alpha\}\} & \textit{si } k \textit{ es impar.} \end{cases}$$

Definimos a la variable aleatoria $U_n[\alpha, \beta]$, que cuenta el número de cruces de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ al intervalo $[\alpha, \beta]$, como

$$U_n[\alpha, \beta] = \text{máx}\left\{i : X_{\tau_{2i-1}} \leq \alpha < \beta \leq X_{\tau_{2i}}\right\}. \tag{3.1}$$

La definición anterior también es válida si $n = \infty$. En este caso, $U_\infty[\alpha, \beta]$ cuenta las veces que la sucesión cruza el intervalo, y puede tomar el valor de infinito. Además, se cumple que

$$U_\infty[\alpha, \beta] = \lim_{n\to\infty} U_n[\alpha, \beta].$$

El siguiente teorema, debido a Doob, nos da una cota para la esperanza del número de cruces en una submartingala.

Teorema 7. *Sea $(X_n)_{n=1}^\infty$ una submartingala. Para $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se cumple*

$$\mathbb{E}[U_n] \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n|] + |\alpha|}{\beta - \alpha}. \tag{3.2}$$

Corolario 1. *Sea $(X_n)_{n=1}^\infty$ una submartingala acotada en $\mathcal{L}_1$, es decir,*

$$K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty.$$

Sea $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathbb{P}(U_n[\alpha, \beta] = \infty) = 0 \tag{3.3}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_n[\alpha, \beta]] &\leq \frac{\mathbb{E}[|X_n|] + |\alpha|}{\beta - \alpha} \\ &\leq \frac{K + |\alpha|}{\beta - \alpha} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Como la última desigualdad no depende de n, si $n \to \infty$, $\mathbb{E}[|U_\infty|] < \infty$. De aquí concluimos que $\mathbb{P}(U_n[\alpha, \beta] = \infty) = 0$. □

El corolario anterior nos dice que para una trayectoria, el número de veces que la submartingala cruza un intervalo será finito, con probabilidad 1. Como una martingala también es submartingala, el resultado también es válido para este caso. Si $(X_n)_{n=1}^\infty$ es una supermartingala, el resultado se puede generalizar facilmente, tomando la submartingala$(-X_n)_{n=1}^\infty$.

El siguiente teorema, también debido a Doob nos da condiciones suficientes para la convergencia de una submartingala.

Teorema 8. *Sea $(X_n)_{n=1}^\infty$ una submartingala acotada en $\mathcal{L}_1$. Entonces, $X_\infty = \text{lím}\, X_n$ existe y es finito c.s. Además, X_∞ es $\mathscr{F}_\infty$-medible y $\mathbb{E}[|X|] \leq K$.*

Demostración: Sea $\Lambda \subset \Omega$ el conjunto donde $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge. Demostraremos que $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$, por lo que la convergencia se da casi dondequiera. Veamos que

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \{\omega : X_n(\omega) \text{ no converge}\} \\
&= \{\omega : \liminf X_n(\omega) < \limsup X_n(\omega)\} \\
&= \bigcup_{\{a,b\in\mathbb{Q}, a<b\}} \{\omega : \liminf X_n(\omega) < a < b < \limsup X_n(\omega)\} \\
&= \bigcup_{\{a,b\in\mathbb{Q}, a<b\}} \Lambda_{a,b},
\end{aligned}$$

donde $\Lambda_{a,b} = \{\omega : \liminf X_n(\omega) < a < b < \limsup X_n(\omega)\}$. Entonces $\Lambda_{a,b} \subset \{\omega : U_\infty [a,b](\omega) = \infty\}$, ya que si el límite superior e inferior se encuentran por afuera de esas cotas, $X_n(\omega) < a$ y $X_m(\omega > b$ para un número infinito de n's y m's. Pero como $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $\mathcal{L}_1$, por el corolario 1, $\mathbb{P}(U_\infty [a,b] = \infty) = 0$, de donde

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Lambda) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\{a,b\in\mathbb{Q}, a<b\}} \Lambda_{a,b}\right) \\
&\leq \sum_{\{a,b\in\mathbb{Q}, a<b\}} \mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_\infty = \lim X_n$ existe c.s. Del hecho de que $X_\infty = \limsup X_n$ tenemos que es $\mathscr{F}_\infty$-medible. Para ver que es finito, veamos que, por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X\infty|] &= \mathbb{E}[\liminf |X_n|] \\
&\leq \liminf \mathbb{E}[|X_n|] \\
&\leq \sup \mathbb{E}[|X_n|].
\end{aligned}$$

□

Corolario 2. *Si $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una martingala no negativa, entonces existe $\lim_n X_n$ y converge a una variable aleatoria X no negativa e integrable.*

3.3. Martingalas uniformemente integrables

La integrabilidad uniforme es un concepto importante de análisis. Ilustraremos la definición y algunas consecuencias en la teoría de Martingalas.

Definición 10 (Integrabilidad Uniforme)**.** *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y (X_n) una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Se dice que la sucesión (X_n) es* uniformemente integrable *(UI) si*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{[|X_n|\geq\alpha]} X_n \, d\mathbb{P} = 0.$$

Como para cada n se tiene que $X_n \in \mathcal{L}_1$, sabemos que $|X_n| I_{[|X_n| \geq \alpha]}$ converge a 0 c.s. cuando $\alpha \to \infty$, y al ser dominada por $|X_n|$, por el teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{[|X_n| \geq \alpha]} |X_n| \, d\mathbb{P} = 0.$$

Entonces, la definición anterior nos pide que la convergencia a 0 de éstas integrales sea uniforme, es decir, que para toda $\epsilon > 0$ y toda $n \in \mathbb{N}$ exista $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{[|X_n| \geq \alpha]} |X_n| \, d\mathbb{P} < \epsilon.$$

Una característica importante de las sucesiones UI es que son acotadas en $\mathcal{L}_1$. Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es UI, entonces existe α tal que

$$\int_{[|X_n| > \alpha]} |X_n| \, d\mathbb{P} < 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[|X_n|\right] = \int_{[|X|_n \leq \alpha]} |X_n| \, d\mathbb{P} + \int_{[|X_n| > \alpha]} |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \alpha + 1 < \infty. \tag{3.4}$$

De lo anterior, se puede deducir que $\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] \leq \alpha + 1$, por lo que la sucesión es uniformemente acotada en $\mathcal{L}_1$. Por lo tanto, una condición necesaria para que una sucesión esté en $\mathcal{L}_1$ es que cada elemento $X_n \in \mathcal{L}_1$ y que la sucesión sea uniformemente acotada en dicho espacio.

Es importante también notar que el concepto de integrabilidad uniforme se puede extender a familias de funciones no necesariamente numerables. En este trabajo solo nos limitaremos al caso de sucesiones.

A continuación se ilustrarán algunas condiciones suficientes para que una sucesión de variables aleatorias sea uniformemente integrable.

Lema 1. *Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias.*

1. *Si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente acotada en $\mathcal{L}_p$ para alguna $p > 1$, entonces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable.*

2. *Sea Y una variable aleatoria integrable tal que $Y \geq |X_n|$, para toda n, entonces $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable.*

Demostración. 1. La propiedad de que la sucesión sea uniformemente acotada establece que existe una constante K tal que, para toda n, $\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] \leq K$. Sea $\alpha > 0$. Si $|X_n| > \alpha$, entonces, reacomodando, $|X_n| \leq \frac{1}{\alpha^{p-1}} |X_n|^p$. Calculando la esperanza condicional en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_n| \,|\, |X_n| > \alpha\right] &\leq \frac{1}{\alpha^{p-1}} \mathbb{E}\left[|X_n|^p \mid |X_n| > \alpha\right] \\ &\leq \frac{1}{\alpha^{p-1}} K. \end{aligned}$$

Por el hecho de que la sucesión sea uniformemente acotada, podemos calcular la última desigualdad. Dado que $p > 1$, haciendo a $\alpha \to \infty$ se tiene el resultado buscado.

2. Para cualquier $\alpha > 0$, se cumple que

$$\mathbb{E}\left[|X_n| \mid |X_n| > \alpha\right] \leq \mathbb{E}\left[Y | Y > \alpha\right],$$

por lo que haciendo tender a α a infinito, se tiene lo buscado debido a la integrabilidad de Y.

$\square$

El siguiente teorema es muy útil, ya que a través de la integrabilidad uniforme se puede relacionar la convergencia casi segura con la convergencia en $\mathcal{L}_1$.

Teorema 9. *Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias en $\mathcal{L}_1$ tales que $X_n \to X$ c.s. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

1) $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente integrable.

2) $X \in \mathcal{L}_1$ y $X_n \to X$ en $\mathcal{L}_1$.

Demostración. Primero, se asumirá como verdadero el inciso 1) para demostrar el 2).

1) $\Rightarrow$ 2) Aplicando el lema de Fatou y el hecho de $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es UI, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_n|\right] &= \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} |X_n|\right] \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n|\right] \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\right] \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

por lo que $X \in \mathcal{L}_1$. Ahora, veamos que $(X - X_n)_{n=1}^{\infty}$ es UI.

$$\begin{aligned}
\int_{[|X-X_n|>K]} |X - X_n| \, d\mathbb{P} &\leq \int_{[|X-X_n|>K]} |X| \, d\mathbb{P} + \int_{[|X-X_n|>K]} |X_n| \, d\mathbb{P} \\
&= \int |X| I_{[|X-X_n|>K]} \, d\mathbb{P} + \int |X_n| I_{[|X-X_n|>K]} \, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Por un lado, como $X_n \to X$ c.s., $X_n \to X$ en probabilidad, por lo que $I_{[|X-X_n|>K]} \to 0$ c.s. Ademas, como $I_{[|X-X_n|>K]} X \leq X \in \mathcal{L}_1$, podemos aplicar teorema de Convergencia Dominada y obtenemos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int |X| I_{[|X-X_n|>K]} \, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \forall n \geq N_1. \tag{3.5}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int |X_n| I_{[|X-X_n|>K]} \, d\mathbb{P} &= \int_{[|X_n|\leq K_1]} |X_n| I_{[|X-X_n|>K]} \, d\mathbb{P} + \int_{[|X_n|>K_1]} |X_n| I_{[|X-X_n|>K]} \, d\mathbb{P} \\
&\leq \int_{[|X_n|\leq K_1]} K_1 I_{[|X-X_n|>K]} \, d\mathbb{P} + \int_{[|X_n|>K_1]} |X_n| \, d\mathbb{P} \\
&\leq \int K_1 I_{[|X-X_n|>K]} \, d\mathbb{P} + \int_{[|X_n|>K_1]} |X_n| \, d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Por los mismos argumentos antes mencionados, $K_1 I_{[|X-X_n|>K]} \to 0$, por lo que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int K_1 I_{[|X-X_n|>K]} < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \forall n \geq N_2. \tag{3.6}$$

Por último, por ser $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ UI, se tiene que

$$\int_{[|X_n|>K_1]} |X_n| \, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{3} \tag{3.7}$$

para K_1 suficientemente grande y para toda $n \in \mathbb{N}$.

Juntando las ecuaciones 3.5, 3.6 y 3.7, y tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que

$$\int_{[|X-X_n|>K_1]} |X - X_n| \, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \tag{3.8}$$

Por otro lado, como $X_n \in \mathcal{L}_1$ y $X \in \mathcal{L}_1$, entonces $|X - X_n| \in \mathcal{L}_1$, por lo que para cada $n < N$ existe C_n tal que

$$\int_{[|X-X_n|>K_1]} |X - X_n| \, d\mathbb{P} < \epsilon. \tag{3.9}$$

Tomando $\alpha = \max\{K_1, C_1, C_2, \ldots, C_{N-1}\}$, de las ecuaciones 3.8 y 3.9 se tiene que, dado $\epsilon > 0$ existe $\alpha > 0$ tal que

$$\int_{[|X-X_n|>\alpha]} |X - X_n| \, d\mathbb{P} < \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.10}$$

de donde se tiene que $(|X - X_n|)_{n=1}^{\infty}$ es UI. Ahora, veamos que $X_n \to X$ en $\mathcal{L}_1$. Tomando α como en la ecuación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |X - X_n| \, d\mathbb{P} &= \int_{[|X-X_n|\leq\alpha]} |X - X_n| \, d\mathbb{P} + \int_{[|X-X_n|>\alpha]} |X - X_n| \, d\mathbb{P}. \\ &< \int_{\Omega} |X - X_n| I_{[|X-X_n|\leq\alpha]} \, d\mathbb{P} + \epsilon. \end{aligned}$$

Por último, dado que $|X - X_n| I_{[|X-X_n|\leq\alpha]} \leq \alpha$, por el teorema de convergencia acotada, se cumple que $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |X - X_n| I_{[|X-X_n|\leq\alpha]} \, d\mathbb{P} \to 0$, de donde se tiene el resultado buscado.

2) $\Rightarrow$ 1) Primero, veamos que, para $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mathbb{P}(F) < \delta$, entonces $\int_F |X_n| \, d\mathbb{P} < \epsilon$, y esto se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, encontremos que existe α tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[|X_n| > \alpha] < \delta$. Con estos dos argumentos, se podria concluir que $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es UI.

Como $X_n \to X$ en $\mathcal{L}_1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{E}[|X - X_n|] < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, para $n > N$ y $F \in \mathscr{F}$,

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{2} &> \mathbb{E}[|X - X_n|] \\ &\geq \mathbb{E}[|X - X_n| I_F] \\ &\geq |\mathbb{E}[|X_n| I_F] - \mathbb{E}[|X| I_F]| \,. \end{aligned}$$

De lo anterior, se concluye que

$$\mathbb{E}\left[|X_n|I_F\right] < \mathbb{E}\left[|X_|I_F\right] + \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.11}$$

Si $\mathbb{P}(F) = 0$, entonces $I_F = 0$ c.s., por lo que $\mathbb{E}\left[|X|I_F\right] = 0$. Entonces, la medida $\mathbb{Q}$, definida como $\mathbb{Q}(F) = \mathbb{E}\left[|X|I_F\right]$, es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}$. Por lo tanto, existe δ tal que si $\mathbb{P}(F) < \delta$, entonces $\mathbb{E}\left[|X|I_F\right] < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, de la ecuación 3.11, para $n > N$ y $\mathbb{P}(F) < \delta$, se concluye que

$$\mathbb{E}\left[|X_n|I_F\right] < \mathbb{E}\left[|X|I_F\right] + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \tag{3.12}$$

Ahora, sólo falta acotar para $n < N$. Usando el mismo argumento que para X, se puede determinar que $\mathbb{Q}$, definida como $\mathbb{Q}(F) = \mathbb{E}\left[|X_n|I_F\right]$, es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Para $\epsilon > 0$, existe δ_i tal que si $\mathbb{P}(F) < \delta_i$, entonces $\mathbb{E}\left[|X_i|I_F\right] < \epsilon$. Ahora, tomando $\delta^* = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{N-1}, \delta\}$, podemos concluir que

$$\mathbb{E}\left[|X_n|I_F\right] < \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Ahora veamos que existe α tal que $\mathbb{P}\left[|X_n| > \alpha\right] < \delta, \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall \delta > 0$. Dado que $\mathbb{E}\left[|X - X_n|\right] \to 0$, entonces $\mathbb{E}\left[|X_n|\right] \to \mathbb{E}\left[|X|\right]$. De esto, y dado que $X_n \in \mathcal{L}_1$, se puede concluir que la sucesión es uniformemente acotada en $\mathcal{L}_1$, es decir, existe M tal que $\mathbb{E}\left[|X_n|\right] < M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De la desigualdad de Markov, podemos encontrar δ en función de α tal que

$$\mathbb{P}\left[|X_n| > \alpha\right] < \frac{M}{\alpha} < \delta. \tag{3.14}$$

De las ecuaciones 3.13 y 3.14 se tiene concluye que $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es UI.

$\square$

Ejemplo 4. *Un ejemplo de una sucesión que no es uniformemente integrable es la siguiente. Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y*

$$X_n(x) = nI_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}(x). \tag{3.15}$$

Entonces, para cada N, si $n \geq N$, $\int_{[|X_n| \geq N]} |X_n|\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n\, dx = 1$, por lo que no es uniformemente integrable.

El siguiente resultado nos dice que, si tenemos una variable aleatoria integrable, independientemente de la σ-álgebra que tomemos, las esperanzas condicionales con respecto a una σ-álgebra seguirán siendo integrables, y cualquier sucesión de éstas que tomemos será uniformemente integrable.

Lema 2. *Si Z es una variable aleatoria integrable y $(\mathscr{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de σ-álgebras arbitrarias, entonces la sucesión $\left(\mathbb{E}\left[Z|\mathscr{F}_n\right]\right)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Z \geq 0$. Sea

$$A_{\alpha,n} = [\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n] \geq \alpha].$$

Entonces, $A_{\alpha,n} \in \mathscr{F}_n$. Si tomamos la sucesión de números reales $\left(\int_{A_{\alpha,n}} \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n]\, d\mathbb{P}\right)_{n=1}^{\infty}$, por definición de esperanza condicional

$$\int_{A_{\alpha,n}} \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n]\, d\mathbb{P} = \int_{A_{\alpha,n}} Z d\mathbb{P},$$

y por ser Z integrable, $\forall \epsilon > 0$ existe α tal que $\int_{A_{\alpha,n}} Z d\mathbb{P} < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Definición 11. *Sea $(\mathscr{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de σ-álgebras tales que $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \ldots$. Definimos la σ-álgebra $\mathscr{F}_\infty$ como la generada por $\cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$. Se expresa como $\mathscr{F}_n \uparrow \mathscr{F}_\infty$.*

Teorema 10. *Sea $(\mathscr{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de σ-álgebras no decreciente. Si $\mathscr{F}_n \uparrow \mathscr{F}_\infty$ y Z es una variable aleatoria integrable, entonces*

$$\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n] \to \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_\infty] \;\; c.s.$$

Demostración: Por el ejemplo 3, la sucesión $(\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n])$ es una martingala con respecto a $(\mathscr{F}_n)$. Por el lema 2, la martingala es uniformemente integrable. La sucesión es acotada en $\mathcal{L}_1$, ya que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n]|] &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|Z|\;|\mathscr{F}_n]] \\ &= \mathbb{E}[|Z|] \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Por el teorema 8, la sucesión converge a una variable aleatoria X integrable, finita c.s., y $\mathscr{F}_\infty$ medible. Veamos que $X = \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_\infty]$.

Sea $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$. $\mathscr{P}$ es no vacío, ya que al menos contiene al vacío y a Ω. Sean $E, F \in \mathscr{P}$. Entonces $E \in \mathscr{F}_n$ y $F \in \mathscr{F}_m$, para algunas n y m. Por lo tanto, $E, F \in \mathscr{F}_{\text{máx}(n,m)}$, y de ahí que $E \cap F \in \mathscr{P}$. Por lo tanto, $\mathscr{P}$ es un π-sistema (definición 3). Además, para $E \in \mathscr{F}_n$ se cumple que

$$\begin{aligned} \int_E Z\; d\mathbb{P} &= \int_E \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_N]\; d\mathbb{P}, \quad \forall N \geq n, \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n] \\ &= \int_E \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n]; \end{aligned}$$

esto último por que la sucesión es uniformemente integrable. Como esto se cumple $\forall E \in \mathscr{P}$, por el teorema 5, y como $\sigma(\mathscr{P}) = \mathscr{F}_\infty$, entonces $X = \lim \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n]$ es una versión de $\mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_\infty]$.

□

El teorema que demostraremos a continuación es muy importante, ya que nos da una condición necesaria para que una martingala converja, además de una representación para éstas.

Teorema 11. *Sea $(X_n, \mathscr{F}_n)$ una martingala uniformemente integrable. Entonces, existe una variable aleatoria X tal que $X = \lim X_n$ y es acotada en $\mathcal{L}_1$. Además, podemos escribir*

$$X_n = \mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_n\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Demostración. La sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $\mathcal{L}_1$, ya que por ser uniformemente integrable, existe K tal que $\forall \epsilon > 0$ y $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_n|\right] &= \int_{[|X_n|>K]} |X_n| \; d\mathbb{P} + \int_{[|X_n|\leq K]} |X_n| \; d\mathbb{P} \\ &< K + \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo anterior, y por el teorema 8, $X = \lim X_n$ existe, y cumple que $\mathbb{E}\left[|X|\right] < \infty$, y converge en $\mathcal{L}_1$. Veamos que se cumple que $X_n = \mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_n\right]$. Sea $r \geq n$ y $F \in \mathscr{F}_n$. Usando iteradamente la definición de esperanza condicional y la propiedad de martingala se tiene

$$\begin{aligned} \int_F X_r \; d\mathbb{P} &= \int_F \mathbb{E}\left[X_r|\mathscr{F}_{r-1}\right] \; d\mathbb{P} \\ &= \int_F X_{r-1} \; d\mathbb{P} \\ &\;\;\vdots \\ &= \int_F X_n \; d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

por lo que se cumple que, $\forall r \geq n$, $\mathbb{E}\left[X_r|\mathscr{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{F}_n\right] = X_n$. Ahora calculemos $\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}\left[X_r|\mathscr{F}_n\right]$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_n\right] - \mathbb{E}\left[X_r|\mathscr{F}_n\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[X - X_r|\mathscr{F}_n\right]\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left[|X - X_r| \; |\mathscr{F}_n\right] \\ &\to 0 \; c.s., \end{aligned}$$

esto último por la convergencia en $\mathcal{L}_1$. Por lo tanto, $X_n = \mathbb{E}\left[X|\mathscr{F}_n\right]$. □

Para concluir esta sección, se demostrará la desigualdad $\mathcal{L}_p$ de Doob. Este teorema nos será útil para la demostración del teorema de Kakutani. Primero se probará un resultado, también de Doob, que será útil en la demostración de la desigualdad $\mathcal{L}_p$.

Teorema 12 (Desigualdad de submartingalas de Doob)**.** *Sea $Z = \{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una submartingala no negativa, y $c > 0$. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$,*

$$c\mathbb{P}\left(\sup_{i\leq n} Z_i \geq c\right) \leq \mathbb{E}\left[Z_n \middle| \sup_{i\leq n} Z_i \geq c\right] \leq \mathbb{E}\left[Z_n\right]. \tag{3.17}$$

Demostración. Sea $F_0 = \{Z_0 \geq c\}$, y, para $k > 0$, se define recursivamente

$$F_k = \bigcap_{i=0}^{k-1} F_i^C \cap \{Z_k \geq c\},$$

es decir, $F_k = \{Z_0 < c\} \cap \ldots \cap \{Z_{k-1} < c\} \cap \{Z_k \geq c\}$. Sea $F = \left\{\sup_{i \leq n} Z_i \geq c\right\}$. Si $Z_i \geq c$ para alguna $i \leq n$, entonces $sup_{i \leq n} Z_i \geq c$. Y a la inversa, si $sup_{i \leq n} Z_i \geq c$, entonces existe $i \leq n$ tal que $Z_i \geq c$. Por lo tanto, $F = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$, donde los conjuntos F_k son disjuntos uno a uno. Además, $F_k \in \mathscr{F}_k$.

Usando la propiedad de submartingala, se tiene que $\mathbb{E}\left[Z_n I_{F_k}\right] \geq \mathbb{E}\left[Z_k I F_k\right]$, y por la definición de esperanza, $\mathbb{E}\left[Z_k I_{F_k}\right] \geq c\mathbb{P}\left(F_k\right)$.

$$c\mathbb{P}\left(F_k\right) \leq \mathbb{E}\left[Z_n I_{F_k}\right]. \tag{3.18}$$

Sumando sobre todas las $k \leq n$, dado que los F_k son conjuntos disjuntos, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} c\mathbb{P}\left(F_k\right) &= c\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) \\
&= c\mathbb{P}\left(F\right) \\
&= c\mathbb{P}\left(\sup_{i \leq n} Z_i \geq c\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[Z_n I_{F_k}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[Z_n \sum_{k=0}^{n} I_{F_k}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[Z_n I_F\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[Z_n \left| \sup_{i \leq n} Z_i \geq c \right.\right].
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $Z_n I_F \leq Z_n$, se cumple que $\mathbb{E}\left[Z_n \left| \sup_{i \leq n} Z_i \geq c \right.\right] \leq \mathbb{E}\left[Z_n\right]$. $\square$

Teorema 13 (Desigualdad $\mathcal{L}_p$ de Doob)**.** *Sean $p, q > 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una martingala no negativa, y acotada en $\mathcal{L}_p$. Sea*

$$X^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Entonces, $X^* \in \mathcal{L}_p$, y además

$$\mathbb{E}\left[|X^*|^p\right] \leq q^p \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]. \tag{3.19}$$

Usando la norma de $\mathcal{L}_p$ definida en la ecuación 2.3, el resultado anterior es equivalente a

$$\|X^*\|_{\mathcal{L}_p} \leq q \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Antes de proceder con la demostración, se probará el siguiente lema que se usará para obtener la desigualdad.

Lema 3. *Sean X y Y variables aleatorias no negativas tales que*

$$c\mathbb{P}\left(X \geq c\right) \leq \int_{[X\geq c]} Y \ d\mathbb{P} \qquad \forall c > 0. \tag{3.20}$$

Si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, con $p>1$, entonces

$$\|X\|_{\mathcal{L}_p} \leq q\|Y\|_{\mathcal{L}_p}.$$

Demostración. De la ecuación 3.20, multiplicando por pc^{p-2} e integrando con respecto a c

$$\int_0^\infty pc^{p-1}\mathbb{P}\left(X \geq c\right) \ dc \leq \int_0^\infty pc^{p-2}\left(\int_{[X\geq c]} Y \ d\mathbb{P}\right) dc. \tag{3.21}$$

Por el teorema de Fubini, cambiando el orden de las integrales, se puede escribir lo anterior como

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty pc^{p-1}\mathbb{P}\left(X \geq c\right) \ dc &= \int_0^\infty pc^{p-1}\left(\int_\Omega I_{[X\geq c]} \ d\mathbb{P}\right) dc \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^\infty pc^{p-1} I_{[X\geq c]} \ dc\right) d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^X pc^{p-1} \ dc\right) d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega X^p \ d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\left[X^p\right] \\
&= \|X\|_{\mathcal{L}_p}^p.
\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo para el lado derecho de la ecuación 3.21,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty pc^{p-2}\left(\int_{[X\geq c]} Y \ d\mathbb{P}\right) dc &= \int_0^\infty pc^{p-2}\left(\int_\Omega Y I_{[X\geq c]} \ d\mathbb{P}\right) dc \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^X pc^{p-2} Y \ dc\right) d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\left[qX^{p-1}Y\right] \\
&= q\|X^{p-1}Y\|_{\mathcal{L}_1}.
\end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuacion 3.20 y aplicando la desigualdad de Hölder

$$\|X\|_{\mathcal{L}_p}^p \leq q\|X^{p-1}Y\|_1 \leq \|Y\|_{\mathcal{L}_p}\|X^{p-1}\|_{\mathcal{L}_q} \tag{3.22}$$

Si $\|X\|_{\mathcal{L}_p} = 0$, el resultado es obvio. Ahora supongamos que $\|X\|_{\mathcal{L}_p} > 0$, y, por ahora, que $\|X\|_{\mathcal{L}_p} < \infty$. Como $(p-1)q = p$, se puede reescribir

$$\begin{aligned}
\|X^{p-1}\|_{\mathcal{L}_q} &= \|X^{(p-1)q}\|_{\mathcal{L}_1}^{\frac{1}{q}} \\
&= \|X\|_{\mathcal{L}_p}^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la ecuación 3.22, se cumple que $\|X\|_{\mathcal{L}_p} \leq q\|Y\|_{\mathcal{L}_p}$. Si $\|X\|_{\mathcal{L}_p}$ no es acotada, basta con tomar en la demostración $\max\{X, n\}$. Entonces, $\|\max\{X, n\}\|_{\mathcal{L}_p} \leq q\|Y\|_{\mathcal{L}_p}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Convergencia Monótona, se tiene el resultado. $\square$

Demostración. Sea $Z_n^* = \sup_{i \leq n} Z_i$. Por la desigualdad de submartingalas 12 se cumplen las hipótesis del lema 3.20 para $Z_n ast$ y Z_n. Por lo tanto

$$\|Z_n^*\|_{\mathcal{L}_p} \leq q\|Z_n\|_{\mathcal{L}_p} \leq q \sup_{k \in \mathbb{N}} \|Z_n\|_{\mathcal{L}_p}. \tag{3.23}$$

Aplicando el teorema de Convergencia Monótona, dado que Z_n^* es creciente, se tiene que $\lim \|Z_n^*\|_{\mathcal{L}_p} = \|Z^*\|_{\mathcal{L}_p}$, de donde se obtiene el resultado. $\square$

4. El teorema de Radon-Nikodym por medio de martingalas

Ya se citó el teorema de Radon-Nikodym, sin demostración. A continuación se dará una demostración del teorema mediante martingalas. Para ésto, nos será útil alguna definición alternativa de esperanza condicional, que nos permita demostrar su existencia sin necesidad de este mismo teorema. Sin embargo, este resultado solo es aplicable para medidas de probabilidad, mientras que el teorema de Radon-Nikodym es para el caso mas general de medidas σ-finitas.

Teorema 14 (Radon-Nikodym)**.** *Sean $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ y $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ dos espacios de medida tales que $\mathbb{Q}$ es finita, y $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Entonces existe $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ tal que*

$$\mathbb{Q}(F) = \int_F X \, d\mathbb{P}, \quad \forall F \in \mathscr{F}.$$

Se dice que X es una versión de la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ con respecto a $\mathbb{P}$, se escribe

$$X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}},$$

y cualesquiera dos versiones son iguales con probabilidad 1.

Demostración: Se demostrará el caso donde $\mathscr{F}$ es separable, es decir, $\mathscr{F} = \sigma(F_n : F_n \subset \Omega, n \in \mathbb{N})$. Sea $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de Ω tales que $\sigma(F_n : n \in \mathbb{N}) = \mathscr{F}$, y definimos $\mathscr{F}_n =$

$\{F_1, \ldots, F_n\}$. Entonces $\mathscr{F}_n$ es la σ-álgebra que contiene a los $2^{r(n)}$ posibles átomos $A_{n,1}, \ldots, A_{n,r(n)}$. Ésto es, $A_{n,i} = H_1 \cap \ldots \cap H_n$, donde $H_i = F_i$ o F_i^c. Definimos $X_n : \Omega \to [0, \infty)$ para $\omega \in A_{n,k}$ como

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{P}(A_{n,k}) = 0 \\ \frac{\mathbb{Q}(A_{n,k})}{\mathbb{P}(A_{n,k})} & \text{si } \mathbb{P}(A_{n,k}) > 0 \end{cases}$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |X_n| \, d\mathbb{P} &= \int_\Omega |X_n| \, d\mathbb{P} \\ &= \sum_{i=1}^{r(n)} \int_{A_{n,i}} X_n \, d\mathbb{P} \\ &= \sum_{i=1}^{r(n)} \mathbb{Q}(A_{n,i}) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

por lo que $X_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{P})$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_F X_n \, d\mathbb{P} &= \sum_{i=1}^{r(n)} \int_{F \cap A_{n,i}} X_n \, d\mathbb{P} \\ &= \sum_{i=1}^{r(n)} \mathbb{Q}(F \cap A_{n,i}) \\ &= \mathbb{Q}(F), \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\mathbb{E}\left[X_n | F\right] = \mathbb{Q}(F), \quad \forall F \in \mathscr{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

de donde $X_n = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ en $(\Omega, \mathscr{F}_n)$. Además, tenemos que $\forall F \in \mathscr{F}_n$, al cumplir que F también está en $\mathscr{F}_{n+1}$

$$\begin{aligned} \int_F X_{n+1} \, d\mathbb{P} &= \mathbb{Q}(F) \\ &= \int_F X_n \, d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

entonces se cumple que $\mathbb{E}\left[X_{n+1} | \mathscr{F}_n\right] = X_n$ c.s., por lo que la sucesión $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n=1}^\infty$ es una martingala. Como es una martingala no negativa, por el Corolario 2 sabemos que existe $X = \lim_n X_n$ c.s. Sea $\epsilon > 0$. Usando el hecho de que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, sabemos que existe δ tal que, si $\mathbb{P}(F) < \delta$, entonces $\mathbb{Q}(F) < \epsilon$. Sea $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\frac{\mathbb{Q}(\Omega)}{k} < \delta$. Entonces, usando la desigualdad de Markov, para toda n en $\mathbb{N}$ se cumple que

$$\mathbb{P}\left[X_n > k\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[X_n\right]}{k} = \frac{\mathbb{Q}(\Omega)}{k} < \delta,$$

por lo que

$$\int_{[X_n>k]} \mathbb{E}\left[X_n|\mathscr{F}_n\right] \, d\mathbb{P} = \mathbb{Q}\left[X_n > k\right] < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo que implica que la martingala $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable, de donde $X_n \to X$ en $\mathcal{L}_1$. De la ecuación (4.1) vemos que las medidas $\mathbb{E}\left[X|F\right]$ y $\mathbb{Q}(F)$ coinciden en el π-sistema $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$, y por el Teorema 5, coinciden en $\mathscr{F}$. De aquí, tenemos que

$$\mathbb{Q}(F) = \int_F X \, d\mathbb{P}, \quad \forall F \in \mathscr{F},$$

que es lo que queríamos demostrar. Esta representación integral es única c.s., dada la unicidad de la esperanza condicional. □

5. Teorema de Kakutani

En esta sección se dará una prueba del teorema de Kakutani haciendo uso de martingalas. Muchos de los teoremas que se demostraron con anterioridad serán útiles. En la siguiente sección se verán algunas aplicaciones del teorema.

Teorema 15 (Teorema de Kakutani)**.** *Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes y no negativas, tal que $\mathbb{E}\left[X_n\right] = \mathbb{E}\left[|X_n|\right] = 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos las variables aleatorias*

$$M_n = \prod_{i=1}^{n} X_i,$$

por lo que $(M_n, \sigma(X_1, \ldots, X_n))_{n=1}^{\infty}$ es una martingala no negativa. Entonces, existe $M = \lim_{n\to\infty} M_n$, y los siguientes incisos son equivalentes

1) $\mathbb{E}\left[M\right] = 1$.

2) $\|M - M_n\|_{\mathcal{L}_1} \to 0$.

3) $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es uniformemente integrable.*

4) $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_n^{\frac{1}{2}}\right] > 0$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \mathbb{E}\left[X_n^{\frac{1}{2}}\right]\right) < \infty$.

Si alguno de estos incisos falla, entonces $M = 0$ c.s.

Demostración. Sea $a_n = \mathbb{E}\left[X_n^{\frac{1}{2}}\right]$. Es fácil notar que $0 \leq a_n \leq 1$. Primero veamos la equivalencia de los incisos 4) y 5).

5) $\Leftrightarrow$ 4) Del hecho de que, para $x \in [0,1]$, $e^{x-1} \leq 1$, se tiene que $x \leq e^{-(1-x)}$. Aplicando este resultado a a_n, $n \geq 1$ y multiplicando se tiene que

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \leq \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)\right). \tag{5.1}$$

Si $\prod_{n=1}^{\infty} a_n > 0$, reacomodando se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n) < \infty$.
Por otro lado, podemos reescribir la ecuación 5.1 como

$$\log\left(\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} a_n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n).$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n) < \infty$, entonces,

$$-\log\left(\prod_{n=1}^{\infty} a_n\right) < \infty,$$

lo cual se cumple sí y solo sí $\prod_{n=1}^{\infty} a_n > 0$.

4) $\Rightarrow$ 3) Sea (N_n) una sucesión de variables aleatorias de la forma

$$N_n = \frac{X_1^{\frac{1}{2}}}{a_1}\frac{X_2^{\frac{1}{2}}}{a_2}\cdots\frac{X_n^{\frac{1}{2}}}{a_n}.$$

Por el ejemplo 3, (N_n) es una martingala. Veamos que (N_n) es acotada en $\mathcal{L}_2$. Como $a_n \leq 1$, se tiene que $\prod_{i=1}^{\infty} a_i \leq a_1 \cdots a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N_n^2\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[X_1\right]}{a_1^2}\cdots\frac{\mathbb{E}\left[X_n\right]}{a_n^2} \\
&= \frac{1}{(a_1\cdots a_n)^2} \\
&\leq \frac{1}{\left(\prod_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Doob para $\mathcal{L}_2$, se obtiene

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}|M_n|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} N_n^2\right] \leq 4\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left[N_n^2\right] < \infty. \tag{5.2}$$

De la ecuación anterior, se puede ver que la variable aleatoria $\sup_n |M_n|$ pertenece a $\mathcal{L}_1$. Como $M_n \leq \sup_n |M_n|$, hemos encontrado una variable aleatoria integrable que domina a (M_n), por lo que se verifica el segundo inciso del lema 2 y (M_n) es una martingala uniformemente integrable, lo que implica que se cumple el inciso 3) del teorema.

3) $\Rightarrow$ 2) Como $M_n \to M$ c.s. y (M_n) es UI, usando el teorema 9 se tiene el resultado.

2) $\Rightarrow$ 1) De la independencia de las X_n, se puede ver que $\mathbb{E}[M_n] = 1$. Como $0 \leq |\mathbb{E}[M - M_n]| = |\mathbb{E}[M] - 1| \leq \mathbb{E}[|M - M_n|] \to 0$, se tiene que $\mathbb{E}[M] = 1$.

1) $\Rightarrow$ 4) Sea

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{X_n}}{a_i}.$$

Entonces, (Y_n) es una martingala no negativa. Por lo tanto, $Y_n \to Y$, con $Y \geq 0$ c.s. e integrable. Ahora bien, podemos escribir Y_n como

$$Y_n = \frac{\sqrt{M_n}}{\prod_{i=1}^{n} a_i},$$

por lo que $M_n = Y_n^2 \prod_{i=1}^{n} a_i^2 \to M$. Como $Y_n \to Y \in \mathcal{L}_1$, entonces Y^2 es finita c.s. y $Y_n^2 \to Y^2$. Además, $Y^2 \prod_{i=1}^{\infty} a_n = M$. Si $\prod_{i=1}^{\infty} a_n = 0$, como Y^2 es finita,

$$\mathbb{E}\left[Y^2 \prod_{n=1}^{\infty} a_n\right] = 0 \neq \mathbb{E}[M].$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^{\infty} a_n > 0$.

$\square$

6. Aplicación del teorema de Kakutani

Veremos una aplicación del teorema de *Kakutani* para razones de verosimilitud. Ésto nos permitirá saber si dos medidas son absolutamente continuas una con respecto a la otra.

Definición 12 (Distancia de Hellinger)**.** *Sean $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ y $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ dos espacios de probabilidad. Sean f y g las funciones de densidad tales que $f = \frac{d\mathbb{P}}{dx}$ y $g = \frac{d\mathbb{Q}}{dx}$. Definimos la* distancia de Hellinger *entre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ como*

$$H(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \sqrt{\int_{\Omega} \left((d\mathbb{P})^{\frac{1}{2}} - (d\mathbb{Q})^{\frac{1}{2}}\right)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left(f(x)^{\frac{1}{2}} - g(x)^{\frac{1}{2}}\right) dx.}$$

Consideremos el caso donde $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $X_n(\omega) = \omega_n$ y las σ-álgebras

$$\mathscr{F} = \sigma(X_n : n \in \mathbb{N}) \qquad \mathscr{F}_n = \sigma(X_k : 1 \leq k \leq n).$$

Supongamos que para cada n tenemos las funciones de densidad f_n y g_n, y sea $r_n := \frac{g_n}{f_n}$. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas de probabilidad que hacen que las variables X_n sean independientes. Sea $Y_n = r_n\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, y ahora, definimos

$$M_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i.$$

Por la independencia de las variables X_n, entonces las Y_n también son independientes, y además, $\int_\Omega Y_n \, d\mathbb{P} = 1$, por lo que tienen media $\mathbb{P}$ igual a 1. Como se vió en el ejemplo 2, $(M_n, \mathscr{F}_n)$ es una martingala. También, del hecho de que $f_n = \frac{d\mathbb{P}}{dx_n}$ y $g_n = \frac{d\mathbb{Q}}{dx_n}$, tenemos que $M_n = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Si $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ en $\mathscr{F}$, existe $\xi = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ en $\mathscr{F}$ (por el teorema de Radon-Nikodym). Y entonces $M_n = \mathbb{E}\left[\xi | \mathscr{F}_n\right]$, y esto implica que $(M_n, \mathscr{F}_n)$ es uniformemente integrable. Ahora, si $(M_n, \mathscr{F}_n)$ es UI, entonces existe $M = \text{lím}_n M_n$, y tenemos que $\mathbb{E}\left[M | \mathscr{F}_n\right] = M_n$. Pero como para cada $F \in \cup \mathscr{F}_n$ se cumple que $\mathbb{Q}(F) = \mathbb{E}\left[M | F\right]$, y por el Teorema 5 coinciden en $\mathscr{F}$ de donde $M = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Por lo tanto, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sí y solo sí $(M_n, \mathscr{F}_n)$ es UI. En este caso, el teorema de Kakutani implica que $\mathbb{Q}$ es equivalente a $\mathbb{P}$ en $\mathscr{F}$ sí y sólo sí

$$\prod_n \mathbb{E}\left[Y_n^{\frac{1}{2}}\right] = \prod \int_{\mathbb{R}} \sqrt{f_n(x) g_n(x)} \, dx > 0,$$

que es equivalente a

$$\sum_n \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{f_n(x)} - \sqrt{g_n(x)} \right) \, dx < \infty,$$

es decir, que la suma de las distancias de Hellinger entre las diferentes distribuciones converja.

Ejemplo 5. *Veamos el caso en que comparamos la razón de verosimilitud entre dos medidas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ que hacen que la variable aleatoria X_n se distribuya normal con media variable μ_n, o normal con media cero. Es decir*

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

y

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_n)^2}.$$

En este caso, tenemos que, por el teorema de Kakutani, $\mathbb{Q}$ es equivalente a $\mathbb{P}$ en $\mathscr{F}$ sí y sólo sí

$$\begin{aligned}
\prod_n \int_{\mathbb{R}} \sqrt{f_n(x) g_n(x)} \, dx &= \prod_n \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_n)^2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}}} \\
&= \prod_n \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{e^{-\frac{1}{2}(x^2+x^2-2\mu_n x+\mu_n^2)}}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \prod_n \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x^2-\frac{\mu_n}{2})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu_n^2}{8}} \, dx \\
&= \prod_n e^{-\frac{\mu_n^2}{8}} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

y esto es equivalente a

$$\sum_n \ln(e^{-\frac{\mu_n^2}{8}}) > -\infty,$$

lo que se cumple sí y sólo sí

$$\sum_n \mu_n^2 < \infty.$$

Referencias

[1] Patrick Billingsley, *Probability and measure*, Wiley Series in Probability.

[2] David Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University, 1991.

[3] R.G. Laha, V.K. Rohatgi, *Probability Theory*, John Wiley & Sons, Canada, 1979.

[4] Gerónimo Uribe, *Esperanza y Esperanza Condicional, una primera aproximación*, Notas, Verano de Probabilidad y Estadística, CIMAT, 2009.

[5] Shizuo Kakutani, *On Equivalence of Infinite Product Measures*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 49, No. 1, Enero de 1948.