El arte de la conjetura

Historia de la Ley de los grandes números

Víctor M. Pérez Abreu C.
CIMAT-Guanajuato

Taller de Ciencia para Jóvenes Guanajuato 2017

17 de julio de 2017

Introducción

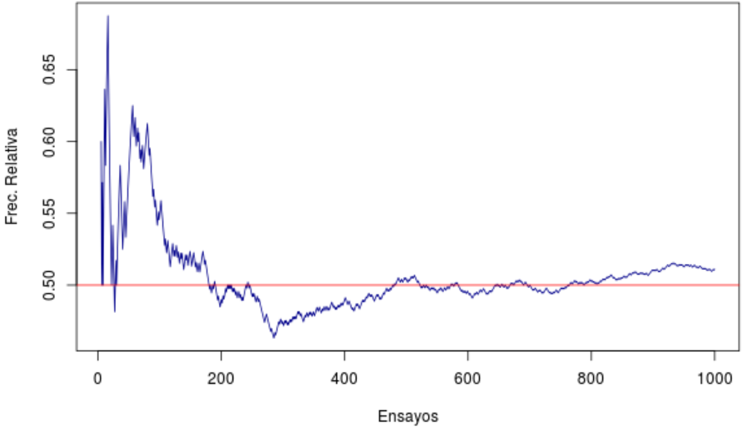
- Supongamos que construimos en casa una moneda y un dado.
- ¿Fue buena nuesta construcción y reañmente la probabilidad de obtener cruz en la moneda es $p = 1/2$ y de $p = 1/6$ en cada lado del dado?
- Realicemos el siguiente experimento: Lanzamos la moneda N veces, contamos cuántas veces salió cruz, y observamos mediante una gráfica la frecuencia del número de veces que salió cruz entre el número de lanzamientos (lo que llamaos frecuencia relativa y denotamos por $\widehat{p}_N$). Hacemos lo mismo con la moneda, observando cuántas veces sale el numero tres, por ejemplo.
- Si la moneda está bien construida, esperamos que $\widehat{p}_N$ se aproxima a $p = 1/2$ en el caso de la moneda y a $p = 1/6$ en el caso del dado.

Introducción

- Se trata de un problema estadístico: inferir la verdadera probabilidad p mediante la frecuencia relativa $\widehat{p}_N$ cuando N es grande.
- La ley de los grandes números es el resultado matemático que nos expresa que tal aproximación se da y nos ayuda a contestar la pregunta ¿qué tan grande debe ser N?
- Este resultado fue estudiado por primera vez por Jacobo Bernoulli, y es parte de su libro El arte de la conjetura publicado en 1713.
- El objetivo de esta conferencia es explicar este resultado a estudiantes de bachillerato, así como comentar la historia de los inicios de la Ley de los grandes números.

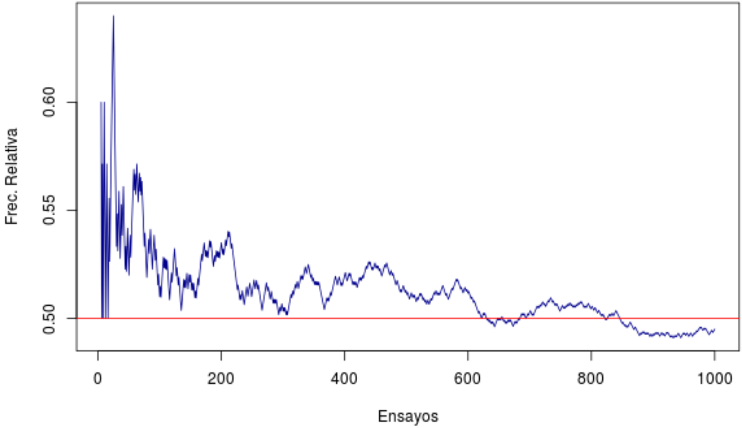
Lanzando monedas

Frecuencia relativa de cruces en un experimento de lanzar una moneda N=1000 veces



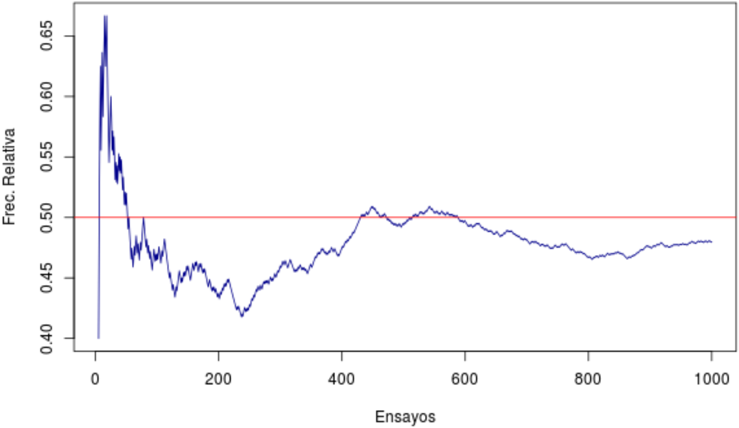
Lanzando monedas

Frecuencia relativa de cruces en otro experimento de lanzar una moneda N=1000 veces



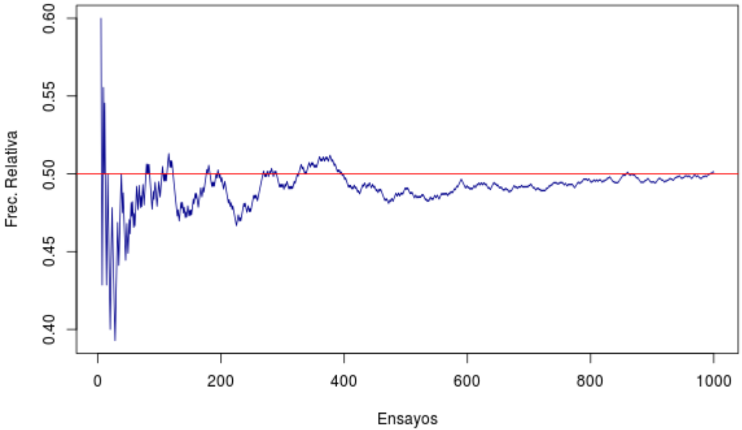
Lanzando monedas

Frecuencia relativa de cruces en un 3er experimento de lanzar una moneda N=1000 veces



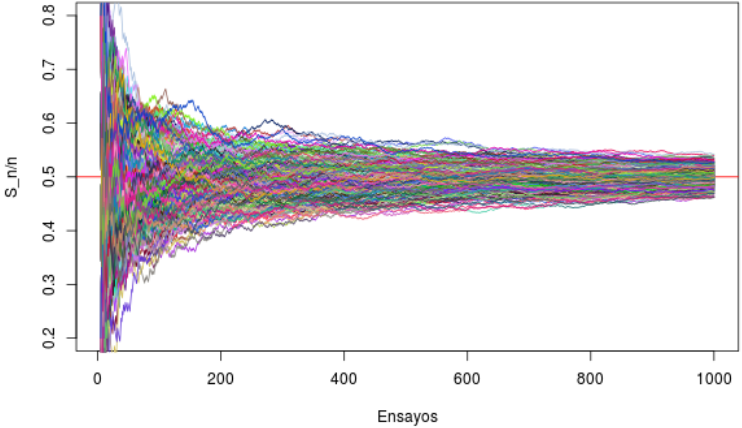
Lanzando monedas

Frecuencia relativa de cruces en cuarto experimento de lanzar una moneda N=1000 veces



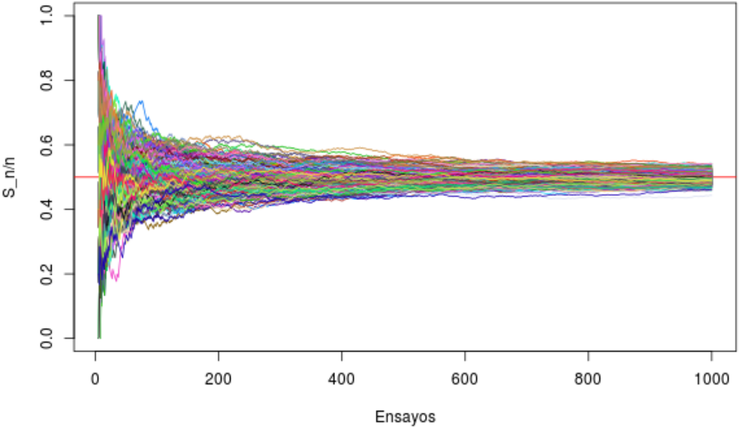
Lanzando monedas

Observando variabilidad al combinar varios experimentos similares con una moneda



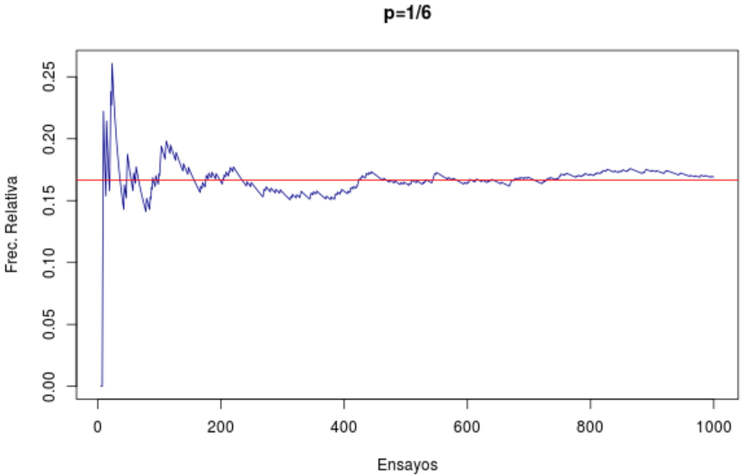
Lanzando monedas

¿Cómo describimos esto matemáticamente?



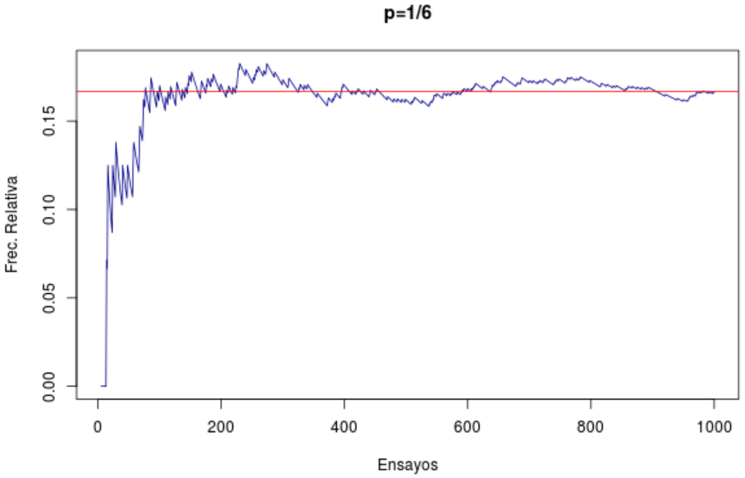
Lanzando dados

Frecuencia relativa del tres en un experimento de lanzar un dado N=1000 veces



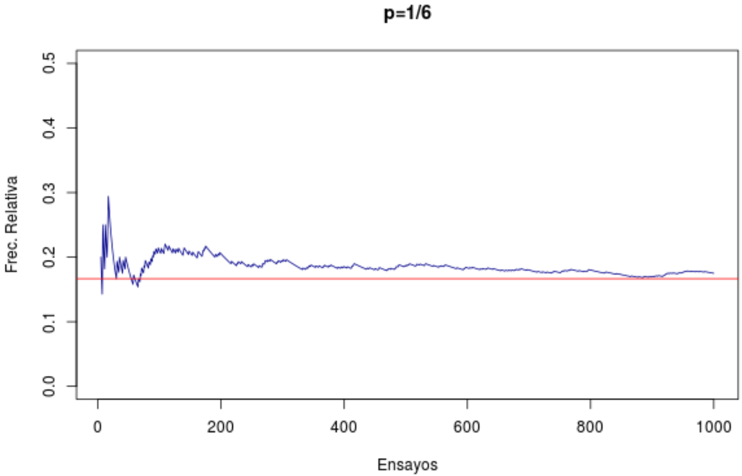
Lanzando dados

Frecuencia relativa del tres en otro experimento de lanzar un dado N=1000 veces



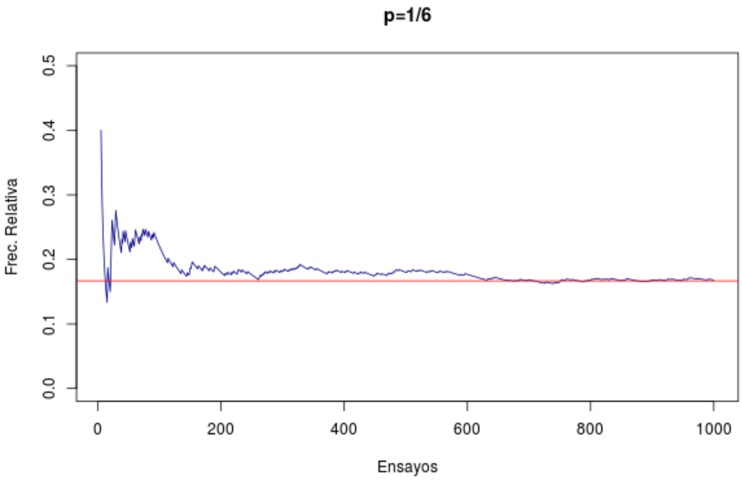
Lanzando dados

Frecuencia relativa del tres en un tercer experimento de lanzar un dado N=1000 veces



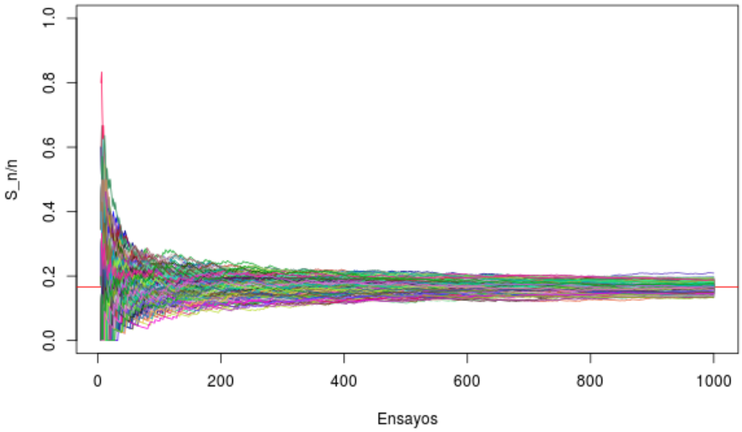
Lanzando dados

Frecuencia relativa de tres en un cuarto experimento de lanzar un dado N=1000 veces



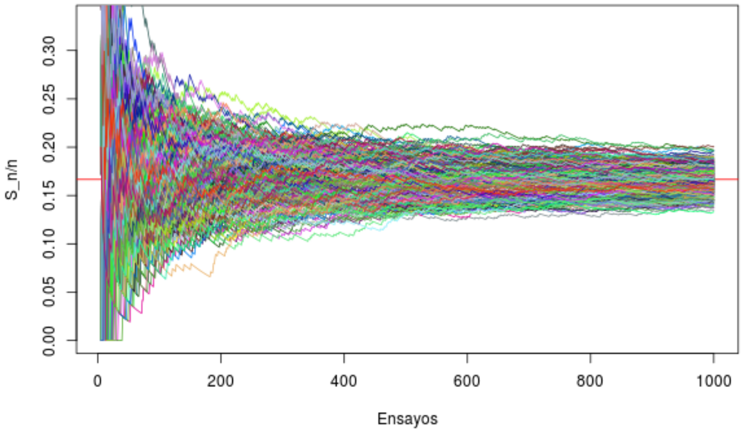
Lanzando dados

¿Cómo describimos esto matemáticamente?

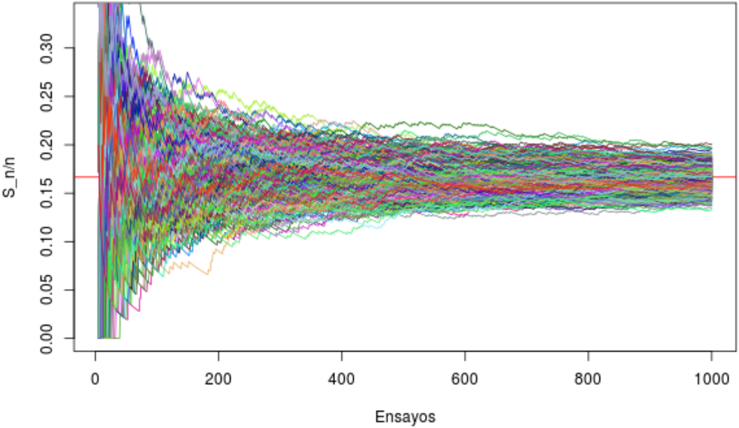


Lanzando dados

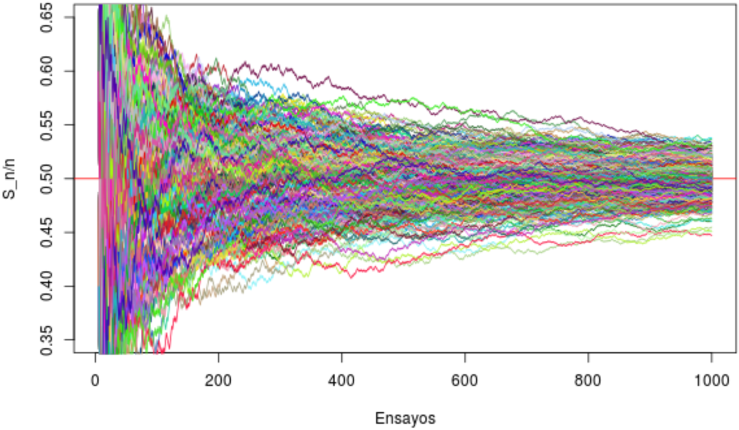
Observando variabilidad al combinar varios experimentos similares con un dado

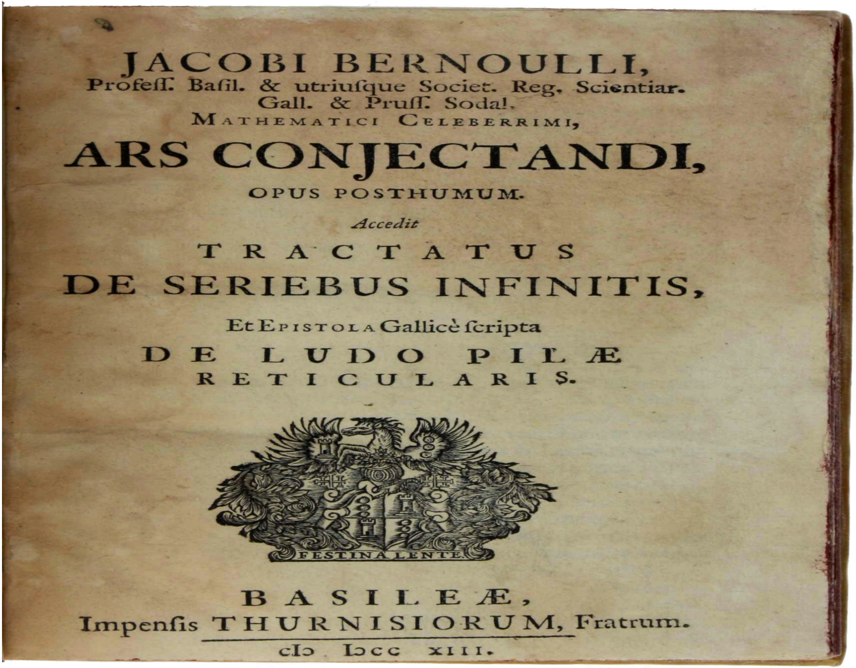


Monedas vs dados



Monedas vs dados





JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

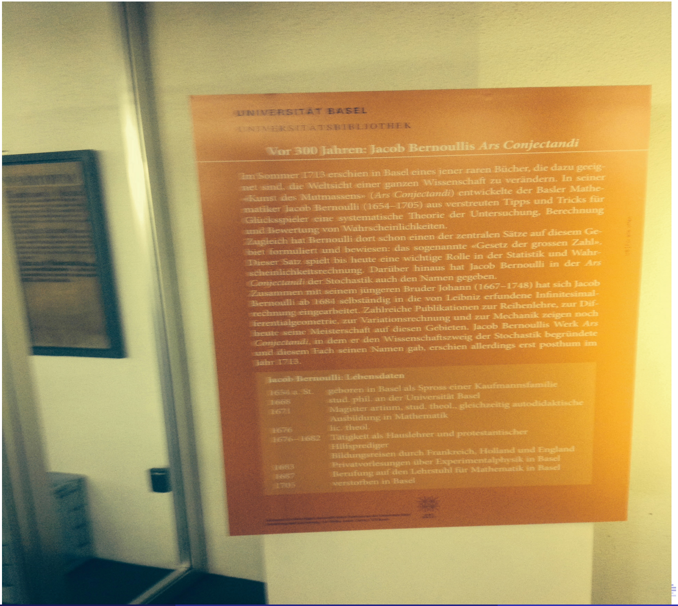
Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè ſcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

Exhibición especial 2013 en Universidad de Basilea, Suiza



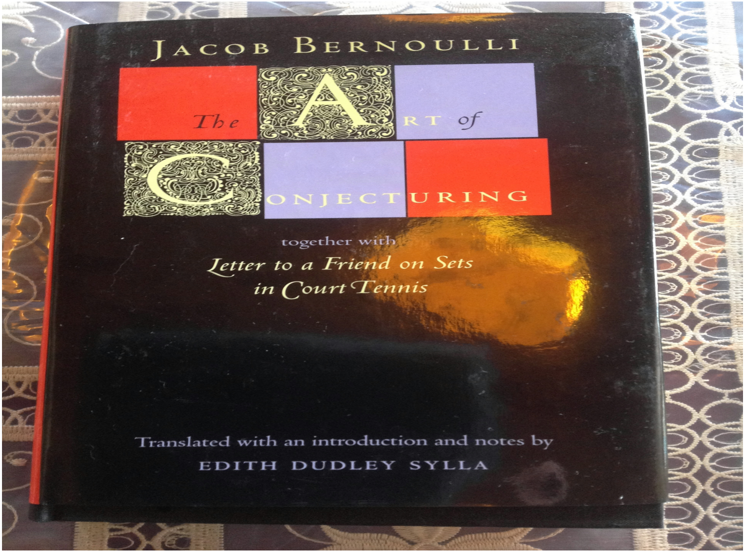
Exhibición especial 2013 en Universidad de Basilea, Suiza

Jacobo Bernoulli (1654–1705)

Retrato pintado por su hermano Nicolás en 1687

Traducción completa del latín al inglés en 2006

Por historiadora de la ciencia: Edith Dudley Sylla



El resultado de oro del Ars Conjectandi

La ley de los grandes números

- En juegos de azar se conocen # casos posibles y # favorables.
- En procesos de la vida real el # casos posibles $(r+s)$ y # casos favorables r están ocultos.
- Repetición sucesiva de un experimento aleatorio en el cual se considera la ocurrencia (**fértil**) o no ocurrencia (**no fértil**) de un evento. Probabilidad de fertilidad en cada repetición del experimento

$$p = r/(r+s).$$

- N # experimentos, S_N # fértiles, $\widehat{p}_N = S_N/N$ **frecuencia relativa**.
- $\epsilon = 1/(r+s)$, es **el error** (tolerado).
- Resultado principal: Dado $c > 0$, se prescribe N para que

$$P_r\left(|\widehat{p}_N - p| \leq \epsilon\right) > cP_r\left(|\widehat{p}_N - p| > \epsilon\right).$$

Ley de grandes números: Hoy en día

Varias formas de expresar: La frecuencia relativa aproxima bien la real.

- Dado $c > 0$, se prescribe N para que

$$P_r\left(|\widehat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r}\right) > cP_r\left(|\widehat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r}\right),$$

$$P_r\left(|\widehat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r}\right) < \frac{1}{1+c}. \tag{1}$$

- Cuando N es muy grande

$$P_r\left(\widehat{p}_N \text{ y } p \text{ difieren en mas de error tolerado}\right) \simeq 0,$$

$$P_r\left(\widehat{p}_N \text{ y } p \text{ difieren en menos de error tolerado}\right) \simeq 1.$$

- Cuando N es muy grande

$$P_r\left(|\widehat{p}_N - p| \leq \epsilon\right) \simeq 0 \quad \text{y} \quad P_r\left(|\widehat{p}_N - p| \leq \epsilon\right) \simeq 1.$$

- Pregunta básica: **¿Qué tan grande debe ser N?**

- Dado $c > 0$, se prescribe N para que

$$P_r\left(|\widehat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r}\right) > cP_r\left(|\widehat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r}\right).$$

- Para $r = 30$, $s = 20$, $t = r + s = 50$, se tiene

$$p = r/t = 30/50.$$

- Con esto la frecuencia relativa se quiere que este entre $(r-1)/t = 29/50$ y $(r+1)/t = 31/50$.
- Dado $c = 1000$, se prescribe $N = 25500$.
- *Jacobo*: "Si se tomaran $N = 25500$ experimentos sería 1000 veces más posible (verosimil) que la razón del número de observaciones fértiles estuviera en el **intervalo** $(29/50, 31/50)$ que fuera de él".

- *Jacobo*: "Si se tomaran $N = 25500$ experimentos sería 1000 veces más posible (verosimil) que la razón del número de observaciones fértiles estuviera en el **intervalo** $(29/50, 31/50)$ que fuera de él".

- *Continúa*, "Si se tomara c como 10,000, se vería que sería más de diez mil veces más probable si hay 31,258 experimentos, y cien mil veces mas probable si hay 36,966 experimentos, y así sucesivamente hasta infinito".

- Demasiada grande el tamaño de muestra N, debido a

$$P_r\left(|\widehat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r}\right) < \frac{1}{1+c}. \tag{2}$$

- *Jacobo mencionaba que mediante* **simulaciones** *veía que el tamaño de muestra N era menor a lo que le deban sus cálculos matemáticos.*

Contenido conferencia de hoy

I. Contexto histórico y científico.

II. Gestación.

1. Interés en lo aleatorio
2. Estudio y trabajo.

III. Parto.

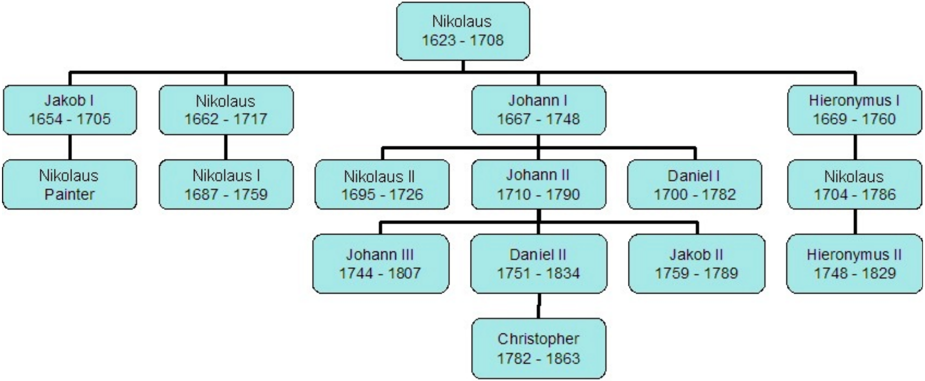
1. Jacobo Bernoulli (1654-1705).
2. Ars Conjectandi se publica en 1713.

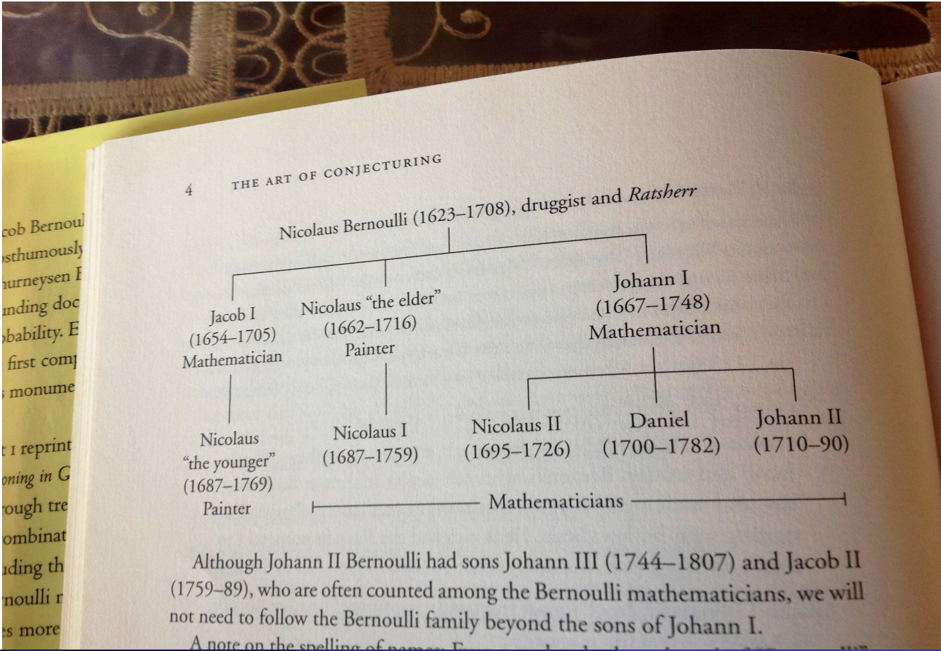
IV. Llanto eterno.

1. Explicar resultado de oro "a la" Bernoulli.
2. Jacobo Bernoulli el visionario.

V. Principio de toda una teoría (Moivre, Laplace, Gauss).

I. Contexto: Familia Bernoulli (Basilea desde siglo XVII)





Nicolaus Bernoulli (1623–1708), druggist and *Ratsherr*

Jacob I
(1654–1705)
Mathematician

Nicolaus "the elder"
(1662–1716)
Painter

Johann I
(1667–1748)
Mathematician

Nicolaus
"the younger"
(1687–1769)
Painter

Nicolaus I
(1687–1759)

Nicolaus II
(1695–1726)

Daniel
(1700–1782)

Johann II
(1710–90)

Mathematicians

Although Johann II Bernoulli had sons Johann III (1744–1807) and Jacob II (1759–89), who are often counted among the Bernoulli mathematicians, we will not need to follow the Bernoulli family beyond the sons of Johann I.

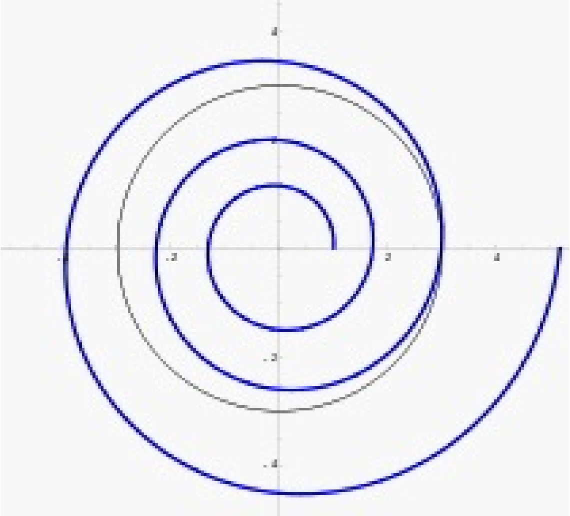
- Origen de la física clásica, determinismo y pensamiento mecanicista:
  - Galileo Galilei (1564-1642).
  - René Descartes (1596-1650).
  - Isaac Newton (1642-1727).
- Desarrollo del cálculo infinitesimal:
  - Disputa entre Netwon y Leibniz (1646-1716).
  - Contribuciones de Jacobo y Johann Bernoulli y relación con Leibniz.
- Astronomía moderna:
  - Johannes Hevelius (1608-1687): Observaciones de la luna y cometas.
  - Christiaan Huygens (1629-1695): Anillo de Saturno.
  - Giovanni Cassini (1625-1712): satélites de Saturno, distancia a marte.
  - John Flamsteed (1646-1719): eclipses solares en 1666 y 1668, observatorio de Greenwich.

I. Contexto: Siglo XVII

- **Jacobo Bernoulli** estudió el **cometa Kirch** y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales,
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719,
  - Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo:
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662).
- Otros científicos de la época:
  - Robert Boyle (1627-1691): Un fundador de la química moderna.
  - Robert Hooke (1635-1703): Gravitación, microscopia.
  - Johannes Hudde (1628-1704): abogado y matemático.
- **Inicios de la historia de la teoría de la probabilidad**
  - 1660 (1552): El libro de juegos de Gerolano Cardano (1501-1576).
  - 1654: Cartas entre Blaise Pascal y Pierre Fermat (1601-1662).
  - 1657: Tratado sobre juegos de azar, Christiaan Huygens (1629-1695).

Carácter dificil, complejo, meticuloso, rigorista, perfeccionista, visionario

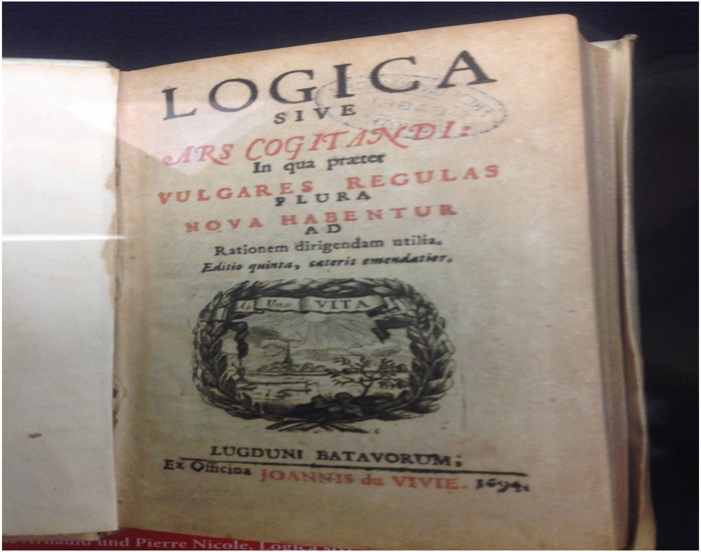
- Fecha nacimiento polémica: 27-diciembre-1654.
- Trayectoria en la Universidad de Basilea, Suiza.
  - 1676: Se gradúa en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Cátedra de profesor de matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural**: *De arte combinatoria).*
  - 1700-1701: Rector
- Estudia matemáticas durante sus viajes después de graduarse:
  - 1676-1680: Suiza y Francia.
  - 1681-1683: Holanda e Inglaterra.
- Contribuciones en Matemáticas no en *El arte de la conjetura.*
  - Cálculo infinitesimal, isoperimetría, cálculo de variaciones.
  - Geometría analítica, coordenadas polares.
  - Series infinitas, **espiral logarítmica**.



I. Contexto: Jacobo Bernoulli

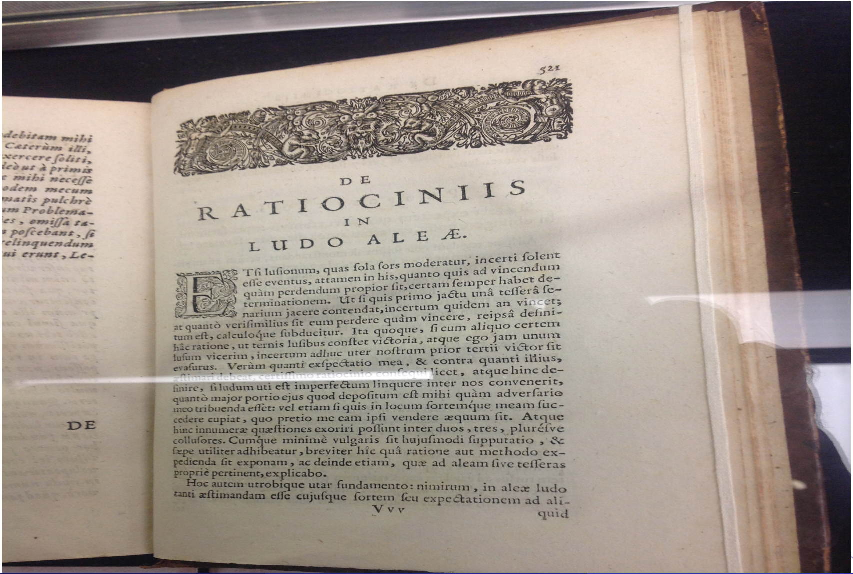
Espiral logarítmica vs espiral Arquimediana

Decisiones bajo incertidumbre en analogía con juegos de azar (A. Arnauld y P. Nicole)



II. Gestación: El matemático y pensamiento estocástico

1684-1685: Estudio de problemas de juegos de azar propuestos por Huygens



DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

Etſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum eſt, calculoque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti exſpectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

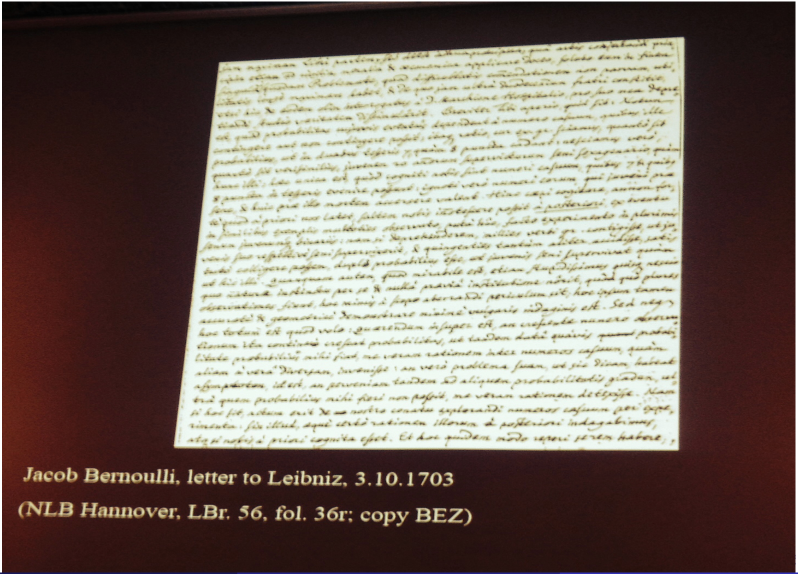
Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æſtimandam eſſe cujuſque ſortem ſeu expectationem ad ali-

Vvv quid

II. Gestación: Conocimiento del cuerpo humano

1686: Cartas a un amigo sobre juegos de tenis real

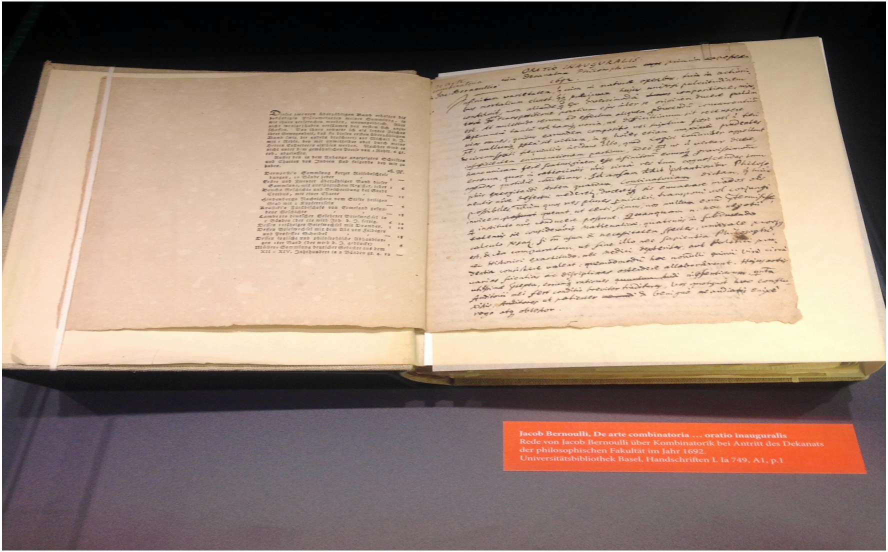
Tennis in Paris in 1632.



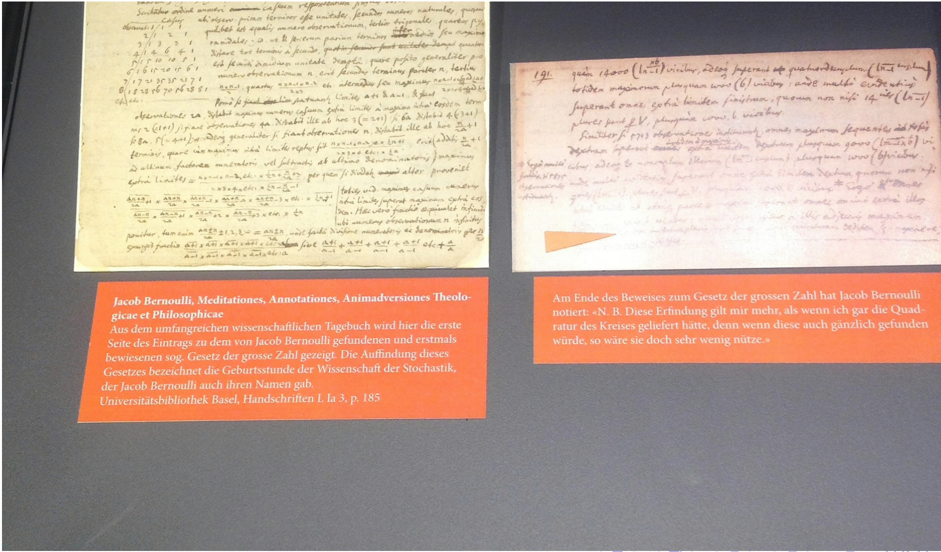
Jacob Bernoulli, letter to Leibniz, 3.10.1703
(NLB Hannover, LBr. 56, fol. 36r; copy BEZ)

II. Gestación: Jacobo el Visionario

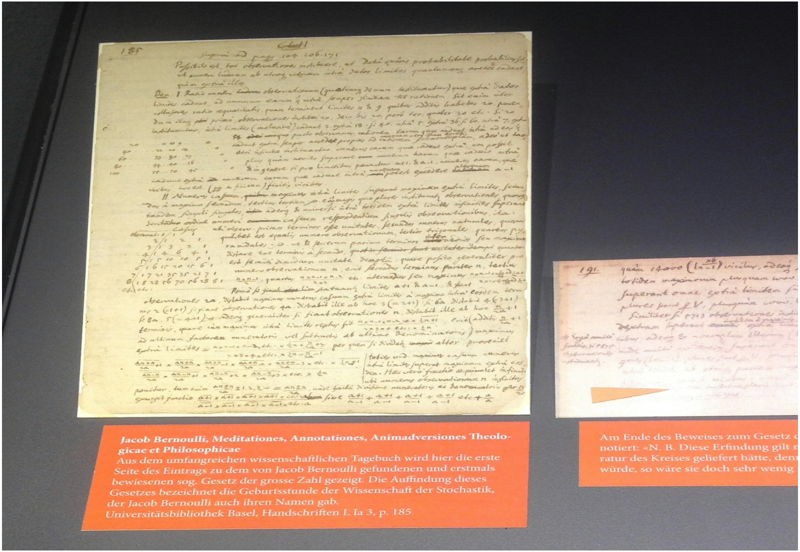
1692: Conferencia inaugural de decanato (sugerencias a médicos, políticos, militares).



III. El parto: Diario (1677-1705) de Jacobo Bernoulli



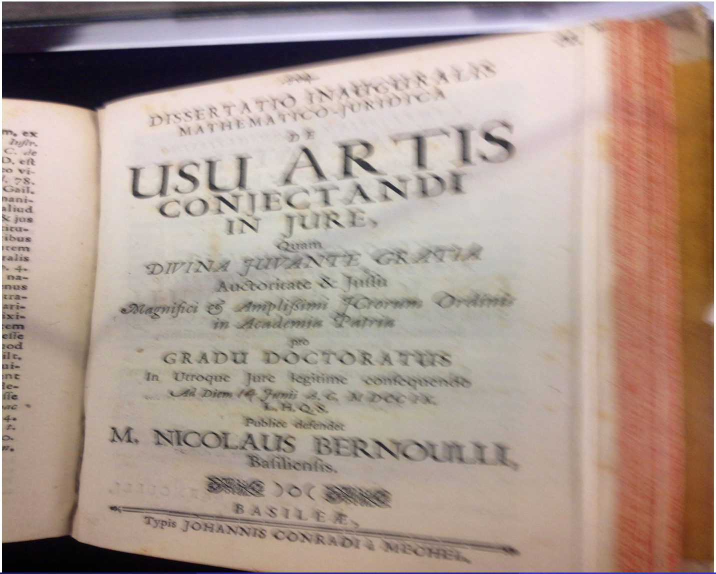
III. El parto: Diario (1677-1705) de Jacobo Bernoulli



- *Matemáticas generales.*
- *Generalista.*
    - Narraciones de viajes.
    - Poemas.
    - Comuniones.
    - Más allá de la religión.
    - Prostitución, mujeres de Ginebra.
    - Resurrección y espiral logartímitica.
    - Problemas sanitarios de las ciudades.
- *Base del Ars Conjectandi*

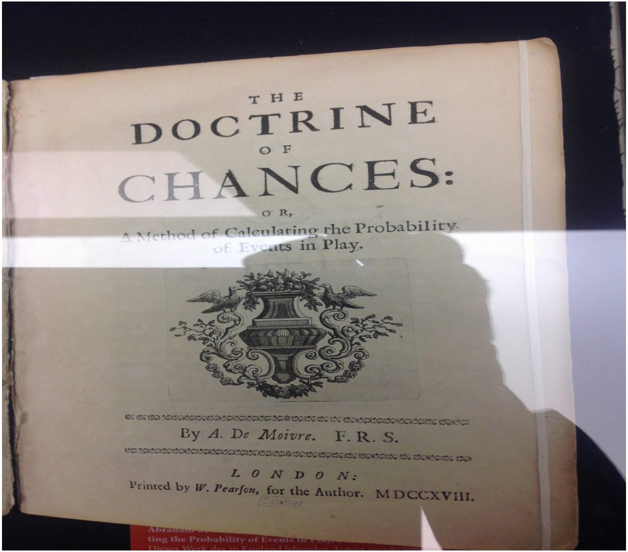
III. Parto: Trabajos pre 1713 "inspirados" en AC

1709: Di Use of Artis Conjectandi in Jure, Nicolas I Bernoulli


DISSERTATIO INAUGURALIS
MATHEMATICO-JURIDICA
DE
USU ARTIS
CONJECTANDI
IN JURE,
Quam
DIVINA JUVANTE GRATIA
Auctoritate & Jussu
Magnifici & Amplissimi JCtorum Ordinis
in Academia Patria
pro
GRADU DOCTORATUS
In Utroque Jure legitime consequendo
Ad Diem 14 Junii A. C. M DCC IX.
L. H. Q. S.
Publice defendet
M. NICOLAUS BERNOULLI,
Basiliensis.
BASILEÆ,
Typis JOHANNIS CONRADI à MECHEL.

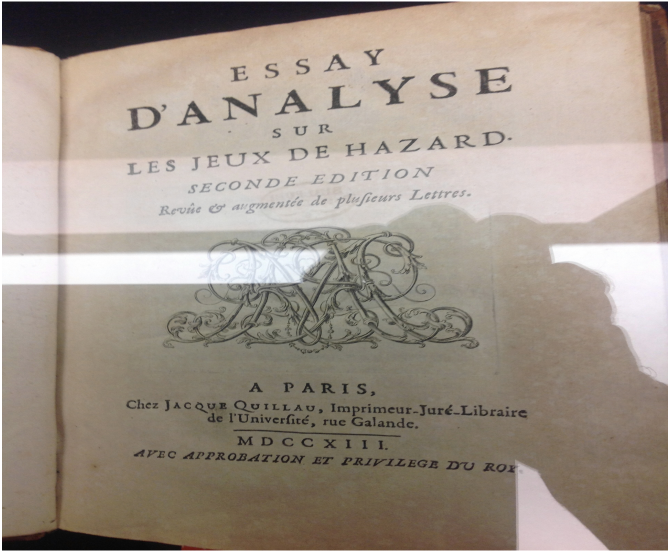
III. Parto: Trabajos pre 1713 "inspirados" en AC

1711: *La doctrina de las suertes*, Abraham de Moivre (1667-1754)



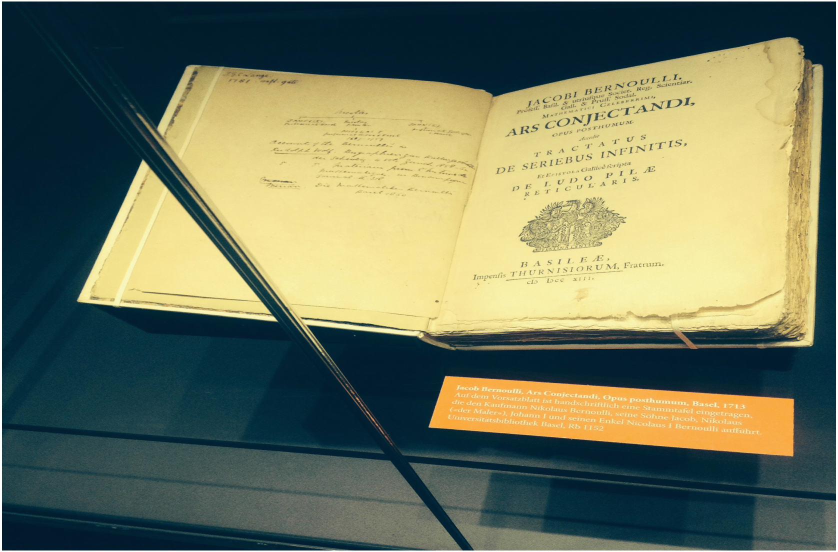
III. Parto: Trabajos pre 1713 "inspirados" en AC

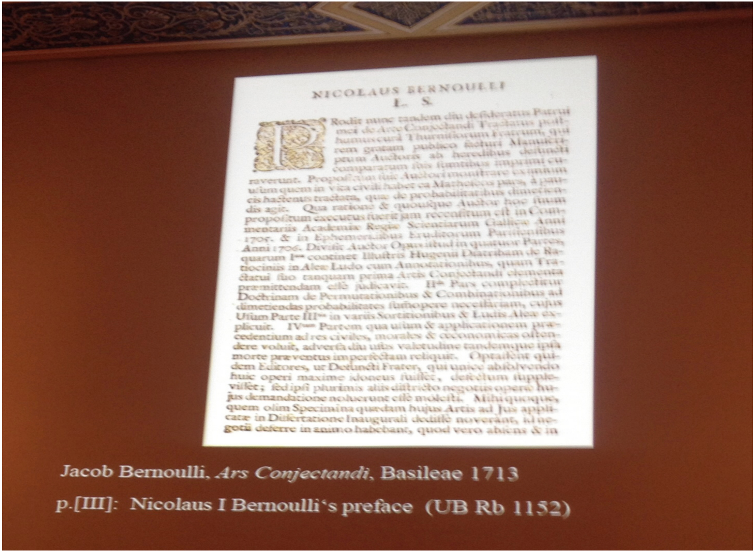
1713: *Essay d´analyse sur les jeux de hazard*, Pierre R. De Montmort



III. Parto: Publicación post mortem en 1713

Presión de Leibniz, dudas de la familia, Nicolas hijo lo lleva a la imprenta




NICOLAUS BERNOULLI
L. S.
Jacob Bernoulli, Ars Conjectandi, Basileae 1713
p.[III]: Nicolaus I Bernoulli's preface (UB Rb 1152)

Parte I *Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar*.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados.
- Distribución binomial.

Parte II *Combinatoria*

- Usa triángulo de Pascal.
- Permutaciones y combinaciones.
- Números de Bernoulli, sumas de potencias de enteros.

Parte III. *24 nuevos juegos de azar*

Apéndice *Series infinitas*: Funciones theta

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{n^2} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} m^{n(n+3)/2}.$$

Carta a un amigo: *Sobre juegos de tenis real.*

IV. Llanto eterno: Contenido Cuarta Parte

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:
  - *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*
  - *Este problema lo he pensado durante 20 años.*
  - *Su novedad y utilidad son tan importantes como su gran dificultad, excediendo la de las otras partes del trabajo.*
  - *Para mi este descubrimiento cuenta más que si hubiera encontrado la cuadratura del círculo; ya que si la encontrara sería de poca utilidad.*
- Contiene frases del tipo:
  - Predecir el futuro.
  - A pesar de que haya cosas ocultas.
- Establece nueve reglas de aplicación de *El arte de la conjetura*.

IV. Llanto eterno: Comienzo de la Parte IV

THE ART OF CONJECTURING
PART FOUR

Teaching

The Use and Application of the Preceding Doctrine in Civil, Moral, and Economic Matters

Chapter I. *Some preliminaries on the certainty, probability, necessity, and contingency of things*

The *certainty* of anything is considered either *objectively* and in itself or *subjectively* and in relation to us. Objectively, certainty means nothing else than the truth of the present or future existence of the thing. Subjectively, certainty is the measure of our knowledge concerning this truth.

In themselves and objectively, all things under the sun, which are, were, or will be, always have the highest certainty. This is evident concerning past and present things, since, by the very fact that they are or were, these things cannot not exist or not have existed. Nor should there be any doubt about future things, which in like manner, even if not by the necessity of some inevitable fate, [211] nevertheless by divine foreknowledge and predetermination, cannot not be in the future. Unless, indeed, whatever will be will occur with certainty, it is not apparent how the praise of the highest Creator's omniscience and omnipotence can prevail. Others may dispute how this certainty of future occurrences may coexist with the contingency and freedom of secondary causes; we do not wish to deal with matters extraneous to our goal.

Seen in relation to us, the certainty of things is not the same for all things, but varies in many ways, increasing and decreasing. Those things concerning the existence or future occurrence of which we can have no doubt—whether because of revelation, reason, sense, experience, αὐτοψία [autopsy, i.e., eyewitness], or other reasons—enjoy the highest, and absolute, certainty. All other things receive a less perfect measure of certainty in our minds, greater or less in proportion as there are more or fewer probabilities that persuade us that the thing is, will be, or was.

Probability, indeed, is degree of certainty, and differs from the latter as a part differs from the whole. Truly, if complete and absolute certainty, which we

315

IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
  - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.
  - Desarrollar un método para medir el valor de la incertidumbre.
- Problemas con alto grado de dificultad para el siglo XVII.
- *Arte de la conjetura*: Usar por analogía métodos de juegos de azar aplicados a la vida real, además de "el resultado mas dificil."
- La diferencia con juegos de azar es que no se conocen las condiciones, están sujetas a fuerzas ocultas.
- **Lo que no se conoce a priori, tiene que encontrase a posteriori**.
- *La verdad no puede ser alcanzada, algunas cosas dependen de causas completamente desconocidas.*
- *No usar El arte de la conjetura en asuntos en los que la certeza completa se puede alcanzar (Axioma o Regla 1).*

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*
- *La probabilidad de un evento futuro es el grado de certidumbre de su ocurrencia.*
- *Algo es más probable que otra cosa si tiene parte mayor de certeza.*
- *En lenguaje común algo es llamado probable si su probabilidad excede notablemente la mitad de la certeza.*
- *Lo que tiene $1/5$ de certeza es más probable que algo que tiene $1/10$, aunque ninguno es positivamente probable.*
- *Algo es posible si tiene una parte de certeza, aunque sea pequeña. Así, algo que tiene $1/20$ o $1/30$ de certeza es posible.*
- *Algo es* **moralmente cierto** *si su probabilidad es tan cercana a la certeza completa, que la diferencia no puede ser percibida.*
- *En contraste, algo es* **moralmente imposible** *si tiene solo como certeza la cantidad por la cual la certeza moral no alcanza la certeza total.*

- *Ya que sin embargo, es rara vez posible obtener certeza completa en todo respecto, la necesidad y el uso ordenan que sólo lo que es moralmente cierto debe ser tomado como absoluta certeza.*

- **Sería útil, por lo tanto, que se definieran límites para la certeza moral los cuales debieran ser establecidos por un magistrado o autoridad.**

- *Por ejemplo, se debería determinar si 99/100 de certidumbre es suficiente o si se requiere 999/1000.*

IV. Explica qué es lo que tenía en mente

- *Para dar un ejemplo de lo que tengo en mente, supon que en una* **urna** *se tienen fichas, desconocidas a tí, 3000 de color blanco y 4000 de color negro, para investigar su número mediante experimentos, sacas una ficha sucesivamente (reemplazando....)......y observas cuántas veces salió una ficha blanca y cuántas una negra.*
- *La preguntas es si puedes hacer esto tantas veces que se vuelve diez, cien, mil, etc. veces más probable (o sea que al final se vuelve moralmente cierto) que el números de veces que obtuviste blanca o negra tendrían la misma razón de tres a dos que* una razón diferente.
- *Debe ser cuidadosamente observado que no queremos que la razón entre los números de casos que hemos observado se interpreten precisamente*
- *Más bien, la razón debe ser definida dentro de un rango, o sea contenida entre dos límites, los cuales pueden acortarse tanto como cualquiera quisiera.*

IV. Cálculos precisos

In the app[illegible] larger the numbers r, s, and t in the same ratio to each other, the mor[illegible] $(r+1)/t$ and $(r-1)/t$ to the ratio r/t can be tightened. Therefore, if the ratio between the numbers of cases r/s, to be determined by experiments, is, say, a three-halves ratio, I do not use 3 and 2 for r and s, but rather 30 and 20, or 300 and 200, etc. It might be sufficient to set $r = 30$, $s = 20$, and $t = r + s = 50$, so that the bounds become $(r+1)/t = 31/50$, and $(r-1)/t = 29/50$. Moreover, let $c = 1000$. Then by the preceding in the Scholium, for the terms to

the left: $$m > \frac{\log [c(s-1)]}{\log (r+1) - \log r} = \frac{4.2787536}{142405} < 301$$

$$nt = mt + \frac{mst - s}{r+1} < 24{,}728$$

the right: $$m > \frac{\log [c \cdot (r-1)]}{\log (s+1) - \log s} = \frac{4.4623980}{211893} < 211$$

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s+1} = 25{,}550.$$

Whence, by what has been demonstrated, it is inferred that if 25,550 experiments are taken, it will be more than 1000 times more likely [*verisimilius*] that the ratio of the number of fertile observations to the number of all the observations will fall between these bounds, 31/50 and 29/50, than outside them. On the same understanding, if c is set equal to 10,000 or 100,000, it may be seen that it will be more than ten thousand times more probable, if there are 31,258 experiments, and more than a hundred thousand times more probable, **[239]** if there are 36,966, and so forth to infinity, continually adding to the 25,550 another 5708 experiments. Whence at last this remarkable result is seen to follow, that if the observations of all events were continued for the whole of eternity (with the probability finally transformed into perfect certainty) then everything in the world would be observed to happen in fixed ratios and with a constant law of alternation. Thus in even the most accidental and fortuitous we would be bound to acknowledge a certain quasi-necessity and, so to speak, fatality. I do not know whether or not Plato already wished to assert this result in his dogma of the universal return of things to their former positions [*apocatastasis*], in which he predicted that after the unrolling of innumerable centuries everything would return to its original state.

IV. Llanto eterno: Aspectos filosóficos

- Dado $c > 0$, se prescribe $N \geq 1$ tal que

$$\mathbb{P}_N\left(|\widehat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r}\right) > c\mathbb{P}_N\left(|\widehat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r}\right).$$

- Jacobo..."*Se sigue de este resultado extraordinario que si se continuaran las observaciones de este experimento por toda la eternidad (con la probabilidad finalmente transformada en certidumbre perfecta), entonces todo en el mundo sería observar lo que ocurre en razones fijas y con una ley constante de alteración.*"
- Finaliza...."*No se si Platón quería o no decir este resultado en su dogma.....todo regresa a su estado original.*"

IV. Llanto eterno: Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**
  - Alto rigor: 5 lemas y "el límite"
  - Definición de límite, John Wallis (1616-1703).
  - 1821: Argumentos $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 1 \ldots$, Cauchy (1789-1857), Bolsano (1781-1848).
- ¿**Qué tan grande debe ser el tamaño de muestra** n?**:**
  - Cota superior para la probabilidad es muy grande.
  - $c = 1$, $\epsilon = 1/5000$ necesitan $N = 25550$.
- **Intuición y estudios empíricos** de Jacobo Bernoulli:
  - *Menos observaciones le decían sus simulaciones.*

IV. Llanto eterno: Modelos de urnas, simulación, aplicación, riesgo.

- **Modelo de urnas**
- Con $r + s$ fichas
    - $r = 3000$, $s = 2000$.
    - Muestreo con reemplazo. Independencia.
- **Simulación**
    - Estudios empíricos: *Se necesitan menos observaciones*.
    - Para ilustrar el resultado.
    - Posibles aplicaciones.

IV. Llanto eterno: Aplicaciones visionarias sugeridas

Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.
- Introducción a la Parte II: Sin los métodos de Ars Conjectandi no puede continuar:
  - La cautela de los políticos (decisiones bajo incertidumbre).
  - Los diagnósticos médicos.
- Conferencia Inaugural como Decano:
  - Descifrar códigos.
  - Composición de medicamentos.
  - Consideración de probabilidad de intervalos es metrología avanzada para el Siglo XVII.

Epitafio de Jacobo Bernoulli

Espiral arquimediana no logarítmica.

Epitafio de Jacobo Bernoulli

Mutante y permanente, vuelvo a resurgir siendo el mismo

Fig 7. Jacob Bernoulli's gravestone


C. S.
IACOBUS BERNOULLI
MATHEMATICUS INCOMPARABILIS
ACAD. BASIL.
VLTRA XVIII ANNOS PROF.
ACADEM. ITEM REGIÆ PARIS. ET BEROLIN.
SOCIUS
EDITIS LUCUBRAT. INLUSTRIS
MORBO CHRONICO
MENTE AD EXTREMUM INTEGRA
ANNO SAL. CIƆIƆCCV. D. XVI. AUGUSTI
ÆTATIS L. M. VII.
EXTINCTUS
RESURRECT. PIOR. HIC PRÆSTOLATUR
IUDITHA STUPANA
XX ANNOR. VXOR
CUM DUOBUS LIBERIS
MARITO ET PARENTI
EHEU DESIDERATISS.
H. M. P.
EADEM MUTATA RESURGO

V. Impacto: Ley de grandes números

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

- 1709, Nicolas I Bernoulli: aplicación en problemas reales.
- **1738, Abraham de Moivre (1667-1754): Teorema Central del Límite Local.**
- **1812, Pierre Simon Laplace (1749-1827): Teorema Central del Límite Integral.**
- 1837, Poisson (1781-1840): Aproximación de Poisson.
- 1853, Byenaymé (1796-1878), 1874 Chebyshev (1821-1894), 1884 Markov (1856-1922):

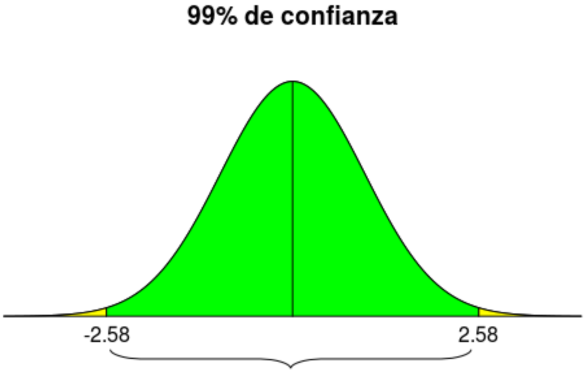
$$\mathbb{P}_n\left(|\widehat{p}_n - p| > \epsilon\right) < \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

- 1938, Cramer (1893-1985): Desviaciones grandes, $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}_n\left(|\widehat{p}_n - p| > \epsilon\right) < 2\exp(-2n\epsilon^2).$$

V. Teorema del límite central

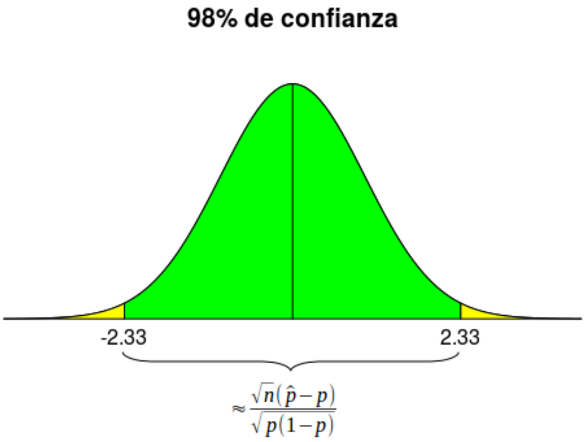
Moivre-Laplace, Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

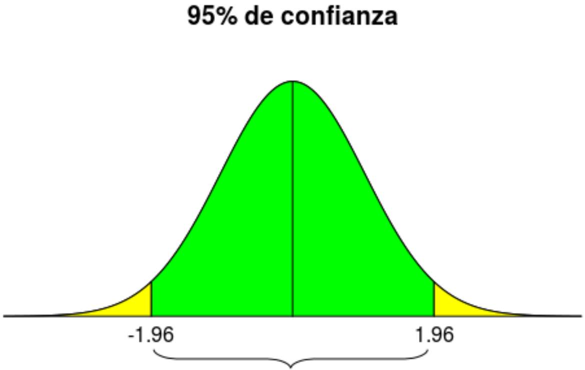


$$\approx \frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}$$

V. Teorema del límite central

Abraham de Moivre (1667-1754), Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

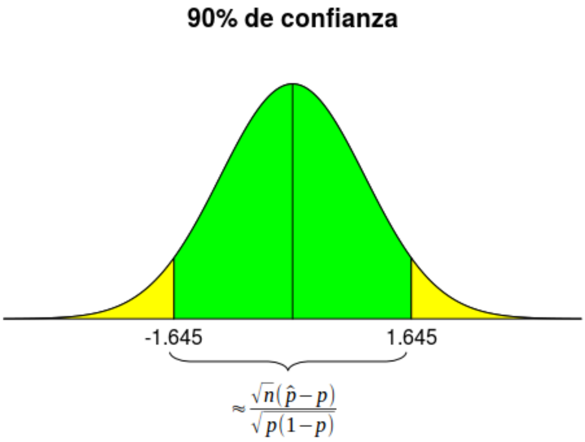


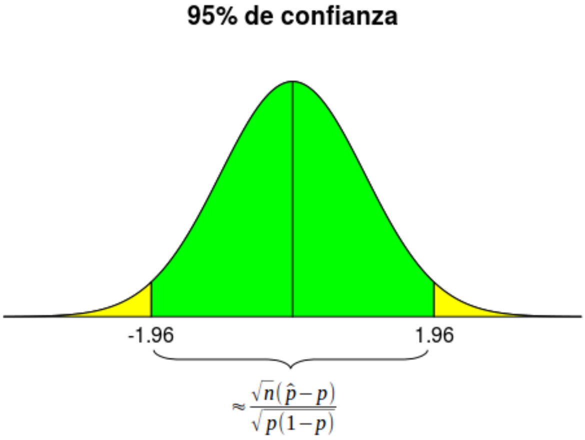


$$\approx \frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}$$

V. Teorema del límite central

Abraham de Moivre (1667-1754), Carl Friedrich Gauss (1777-1855)





95% de confianza
-1.96
1.96
$\approx \frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}$

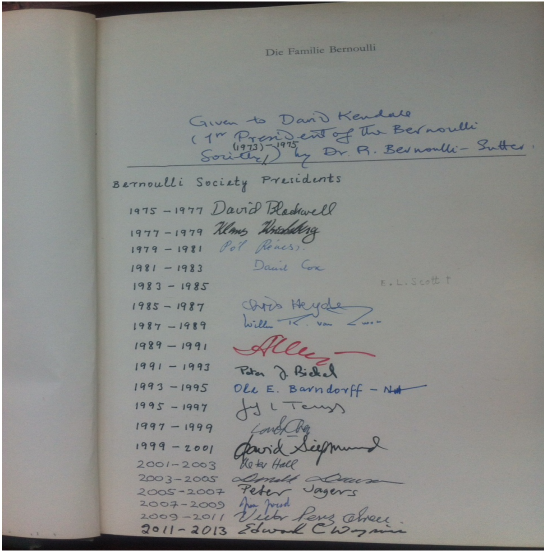
V. Cuál es el tamaño de muestra en una encuesta

- Para 95% de confianza
- $$\frac{\sqrt{N}(\widehat{p}_N - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \text{ debe estar entre } -1.96 \text{ y } 1.96.$$
- Despejando
$$p \text{ debe estar entre } \widehat{p}_N - \frac{1.96}{\sqrt{N}}\sqrt{p(1-p)} \text{ y } \widehat{p}_N + \frac{1.96}{\sqrt{N}}\sqrt{p(1-p)}.$$
- Si fijamos un margen de error permitido entre $\widehat{p}_N$ y p, $error = \pm(\widehat{p}_N - p)/2$
- El tamaño de muestra debe ser
$$N = (1.96)^2 \frac{p(1-p)}{(error)^2}$$
- $p = .5$, $error = .03$, dan $N = 1067$
- Bernoulli $p = r/(r+s) = 30/50$, $\epsilon = 1/(r+s) = 1/50$, $error = 0.01$, dan $N = 2304$.
- Pero p no se conoce, está *oculto*

V. Llanto eterno: Lecturas sugeridas

1. *The Art of Conjecturing,* Jacobo Bernoulli (1713). Traducción al inglés de Edith Dudley, 2006.
2. *The Emergence of Mathematicsl Probability from the perspective of the Leibniz- Jacod Bernoulli Correspondence. Edith Dudley.* Perspectives on Science 6, 41-76, 1998.
3. *The History of Statistics. The Measurement of Uncertanty before 1900.* Stephen M. Stigler, 1986.
4. *Tercentennial Anniversary of Bernoulli's Law of Large Numbers.* Manfred Denker, Bulletin of the American Mathematical Society 50, 373-390, 2013.
5. *A Tricentenary history of the Law of Large Numbers* Eugene Seneta, Bernoulli 19, 1088-1121, 2013.
6. *Probabilidad:Tres hitos en su historia y dinamismo actual.* Víctor Pérez Abreu, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 42, Sociedad Matemática Mexicana, 1-23, 2011.


DIE FAMILIE BERNOULLI
von
René Bernoulli-Sutter
unter Mitarbeit von
Lion Bernoulli
Basel 1972
in Kommission bei Helbing & Lichtenhahn, Basel


Die Familie Bernoulli
Given to David Kendall
(1st President of the Bernoulli
Society (1973)–1975) by Dr. R. Bernoulli-Sutter.
Bernoulli Society Presidents
1975 – 1977 David Blackwell
1977 – 1979 Klaus Krickeberg
1979 – 1981 Pál Révész
1981 – 1983 David Cox
1983 – 1985
E. L. Scott †
1985 – 1987 Chris Heyde
1987 – 1989 Willem R. van Zwet
1989 – 1991
1991 – 1993 Peter J. Bickel
1993 – 1995 Ole E. Barndorff-Nielsen
1995 – 1997 Jef L Teugels
1997 – 1999
1999 – 2001 David Siegmund
2001–2003 Peter Hall
2003–2005
2005–2007 Peter Jagers
2007–2009
2009–2011 Victor Perez Abreu
2011–2013 Edward C Waymire

2013 AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADISTICA

www.estadistica2013cimat.mx

pabreu@cimat.mx

www.cimat.mx/~pabreu

Gracias a

Gil Bor

XXI Taller de Ciencia para Jóvenes

Guanajuato