LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS Y NÚMEROS NORMALES

Guillermo Basulto Elías, Facultad de Matemáticas, Univ. de Guanajuato
Asesor: Víctor M. Pérez Abreu, CIMAT

RESUMEN

En el Verano de Investigación trabajamos en el problema de la Ley de los Grandes Números de Borel y su relación con los Números Normales.

En el marco del desarrollo de la axiomatización de la teoría moderna de la probabilidad, a principios del Siglo XX Emile Borel hizo aportaciones importantes. Por un lado, fue el primero en señalar que existía una relación entre la probabilidad y la teoría de la medida, cosa que fue completamente clarificada por Kolmogorov en 1933. También propuso un modelo matemático riguroso para el problema del lanzamiento de una moneda un número infinito de veces, así como una extensión matemática no trivial de la Ley de los Grandes Números de Bernoulli: "La frecuencia relativa del número de águilas se aproxima a un medio". En el contexto de esta extensión, Borel introduce lo que hoy se conoce como los números normales de Borel en base 2.

Si bien existen extensiones de la ley de grandes números estudiadas en el marco de los axiomas de Kolmogorov, en el tema de números normales aún existen varios problemas abiertos de interés.

En este trabajo presentamos brevemente las ideas de Borel y algunas de sus extensiones.

INTRODUCCIÓN

Si tenemos una moneda y marcamos una cara con cero y cruz con uno, entonces cada sucesión de ceros y unos representará el lanzamiento de tal moneda un número infinito de veces.

Llamemos Ω al intervalo (0,1] $\mathcal{A}$ al conjunto $\{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$: n$\in$ **N**,

$$0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < \ldots \le a_n < b_n \le 1\} \cup \{\phi\};$$

Y para toda A=$\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \in \mathcal{A}$ definimos

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \int_0^1 1_A(x)dx.$$

El espacio de probabilidad elemental (Ω, $\mathcal{A}$, P) es el modelo de Borel para el lanzamiento de una moneda equilibrada un número infinito de veces. Cada número x$\in \Omega$ podemos expresarlo en su expansión binaria, $0.a_1a_2a_3\ldots$(a_i=0 ó 1); y nos fijamos en la sucesión $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, que será la representación del lanzamiento de monedas. Si un número se expresa de dos formas diferentes, como ½=0.100…=0.0111…, tomamos la que no termina en ceros. De esta forma tenemos representados todos los lanzamientos, excepto aquéllos donde, a partir de cierto lanzamiento, salen sólo ceros. La experiencia práctica y el sentido común nos dicen que esto es prácticamente imposible de ocurrir, lo que motiva la siguiente definición:

Un subconjunto G de Ω es *prácticamente imposible de ocurrir* (pio) si para todo ε>0, existe una cubierta de intervalos de G, digamos {I_n}, tal que $\sum_n$ P(I_n) <ε, esto es, podemos encontrar una cubierta numerable de intervalos tal que la suma de sus longitudes sea tan pequeña como queramos.

En este modelo, la *Ley Débil de los Grandes Números de Bernoulli* nos dice que para todo ε>0, las probabilidades

$$P(\{x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i} \in \Omega : |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}a_i - \frac{1}{2}| \ge \varepsilon\})$$

tienden a cero a medida que n se va a infinito. Esto es, la probabilidad de que

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS Y NÚMEROS NORMALES

Guillermo Basulto Elías, Facultad de Matemáticas, Univ. de Guanajuato
Asesor: Víctor M. Pérez Abreu, CIMAT

el número de éxitos entre el total de lanzamientos, n, difiera mucho de ½ es muy pequeña para n suficientemente grande.

Definimos ahora

$$N_2 = \{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{1}{2} \}.$$

A N_2 se le llama el conjunto de números normales en base dos.

Borel probó la siguiente Ley Fuerte de los Grandes Números: *N_2^C es pio.* Ejemplos de números que no son normales en base dos son todos los números de la forma $k/2^n$. 1/3=0.010101… es normal en base dos.

Ahora supongamos que la probabilidad de que al lanzar una moneda salga cero, es $p \in (0,1)$; también digamos que si sale cero, obtenemos un éxito. De esta forma podemos formular el siguiente teorema bien conocido.

Ley Débil de los Grandes Números: $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(\{x \in \Omega : |\frac{1}{n} s_n(x) - q| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

donde $s_n(x)$ es el número de éxitos hasta el n-ésimo lanzamiento.

Si definimos

$$M_q = \{ x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} s_n(x) = q\},$$

podemos establecer la siguiente bien conocida Ley Fuerte de los Grandes Números: *M_q^C es pio.*

Por último consideremos, en lugar de una moneda, una ruleta con m ($m \geq 2$) opciones equiprobables. Cada opción la numeramos del 0 al m-1. Para m=2 es el mismo modelo que el de la moneda balanceada, para m=6 sería un dado balanceado, o bien, podemos modelar los resultados de girar una ruleta con m opciones.

La Ley Débil de los Grandes Números de esta generalización es:

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{x \in \Omega : |\frac{1}{n} r_{n,k}(x) - \frac{1}{m}| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

donde $r_{n,k}(x)$ es el número de veces que se ha observado el número k en la ruleta hasta el n-ésimo giro.

Para todo $m \geq 2$, el conjunto

$$N_m = \{ x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} r_{n,k}(x) = \frac{1}{m} \},$$

con $r_{n,k}(x)$ definida como arriba, es el conjunto de los números normales en base m. El conjunto $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ es el *conjunto de los números normales*. Cada N_m es denso en Ω y además no numerable; lo mismo ocurre con sus complementos. También esto es cierto para N.

En este caso, la Ley Fuerte de los Grandes Números nos dice que para todo $m \geq 2$, N_m^C es pio.

Las ideas y resultados anteriores fueron la base para el trabajo.

OBJETIVOS

1) Aprender algunas generalizaciones del problema del lanzamiento de una moneda un número infinito de veces y los problemas de investigación actuales relacionados.

2) Conocer la relación entre los números normales y la Ley de Grandes Números.

3) Investigar sobre la aplicación de los números normales en otras ciencias.

MATERIALES Y MÉTODOS

1) Se comprendió el caso de la moneda balanceada para comprender a detalle este modelo y sus limitaciones.

2) Se estudiaron generalizaciones del modelo.

3) Se investigó acerca de los números normales, problemas no resueltos y aplicaciones.

RESULTADOS

Vimos que la Ley Fuerte de los Grandes Números en términos de lanzamientos de monedas (es decir, con los números normales de base dos) dice que casi todo número es normal, en el sentido de que el conjunto de los números no normales tiene medida cero. La interpretación es que los números no normales prácticamente no pueden ocurrir.

Hay al menos dos posibles generalizaciones, la primera es trabajar el lanzamiento de una moneda cargada con probabilidad p de éxito un número infinito de veces. La segunda es tomando un juego con n eventos, cada uno con la probabilidad de ocurrir. Para ambos casos se estudiaron las Leyes de Grandes Números.

Se encontró que hay un gran número de problemas que no han sido resueltos y que son de gran interés, por ejemplo, demostrar que π, $\ln(2)$, $\xi(3)$ y e son normales (o no).

Los números normales tienen aplicación en las ciencias computacionales y últimamente se están relacionando con el ADN, en biología.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Borel introdujo la idea de números normales en el contexto de una formulación de de la Ley de Grandes Números para el problema del lanzamiento de una moneda un número infinito de veces. Las contribuciones probabilísticas de Borel son actualmente de carácter histórico y didáctico que motivan el uso de teoría de la medida en probabilidad, pues son resultados bien conocidos en cursos de probabilidad en el contexto de los axiomas de Kolmogorov. Sin embargo, en el tema de números normales aún existen varios problemas abiertos de interés, algunos de ellos muy fáciles de plantear, pero difíciles de resolver

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

a) Mark Kac. “Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory”. Carus Mathematical Monograph, Number 12, 1959.

b) Patrick Billingsley. “Probability and Measure”. Wiley, Tercera Edición, 1995. Capítulo 1.

c) Malcom Adams. “Measure Theory and Probability”. Birkhäuser 1996. Capítulo 1.

d) Agafonov, V. N. "Normal sequences and finite automata." Soviet Mathematics Doklady, 9:324-325, 1968.

Ley de los Grandes Números y Números Normales

Reporte en extenso

Guillermo Basulto Elías

Julio 2007

Contenido

Introducción

En el Verano de Investigación trabajamos en el problema de la Ley de los Grandes Números de Borel y su relación con los Números Normales.

En el marco del desarrollo de la axiomatización de la teoría moderna de la probabilidad, a principios del Siglo XX Émile Borel hizo aportaciones importantes. Por un lado, fue el primero en señalar que existía una relación entre la probabilidad y la teoría de la medida, cosa que fue completamente clarificada por Kolmogorov en 1933. También propuso un modelo matemático riguroso para el problema del lanzamiento de una moneda un número infinito de veces, así como una extensión matemática no trivial de la Ley de los Grandes Números de Bernoulli: "La frecuencia relativa del número de águilas se aproxima a un medio". En el contexto de esta extensión, Borel introduce lo que hoy se conoce como los números normales de Borel en base 2.

Si bien existen extensiones de la ley de grandes números estudiadas en el marco de los axiomas de Kolmogorov, en el tema de números normales aún existen varios problemas abiertos de interés. En este trabajo presentamos brevemente las ideas de Borel y algunas de sus extensiones.

Capítulo 1

Números Normales de Borel

1.1 Espacio de probabilidad para el lanzamiento de una moneda un número infinito de veces

Borel encontró el espacio de probabilidad para este fenómeno, el cual resulta ser el mismo que el espacio de probabilidad de un número aleatorio entre cero y uno.

Si se tiene una moneda marcada con un uno y cero en sus caras, entonces al lanzarla un número infinito de veces, se obtiene una sucesión infinita de cero y unos. Una posible forma de dar un espacio es considerar esta sucesión como los dígitos de la expansión binaria de un número entre cero y uno.

Definamos pues $\Omega = (0,1]$ y

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j] \subset \Omega : n \in \mathbb{N},\ a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \right\} \cup \{\varnothing\}.$$

Además, si $A = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j] \in \mathcal{A}$, definimos $\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$.

Proposición 1.1 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *es un espacio de probabilidad elemental.*

Demostración. Para ver que $\mathcal{A}$ es álgebra, observe que $\Omega = (0,1] \in \mathcal{A}$. Luego, si $A = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j] \in \mathcal{A}$, es claro que $A^c = (0, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup (b_2, a_3] \cup \cdots \cup (b_{n-1}, a_n] \cup (b_n, 1]$ está en $\mathcal{A}$. Finalmente, si $A = \bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j]$ y $B = (a,b]$ están en $\mathcal{A}$, con $b_0 = 0$, $a_{m+1} = 1$, $k_0 =$máx$\{j : b_j \leq a\}$ y $k_1 =$mín$\{j : a_j \geq b\}$, entonces

$$\begin{aligned} A \cup B &= \bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j] \bigcup (a,b] \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^{k_0}(a_j, b_j]\right) \bigcup (a,b] \bigcup \left(\bigcup_{j=k_1}^{m}(a_j, b_j]\right), \end{aligned}$$

de donde $A \cup B \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es álgebra.

Por otro lado, $\mathbb{P}$ es probabilidad, pues es no negativa por definición, $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}((0,1]) = 1$. Y si $A = \bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j] \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{j=1}^{m}(b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega}\mathbf{1}_{(a_j,b_j]}(x)\ dx \qquad (1.1) \\ &= \int_{\Omega}\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{m}(a_j,b_j]}(x)\ dx = \int_{\Omega}\mathbf{1}_{A}(x)\ dx, \end{aligned}$$

por lo que para $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ se tiene que

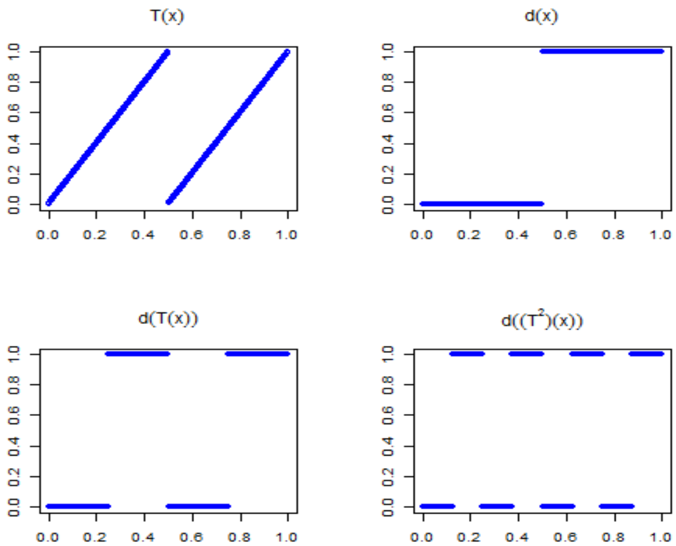
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A\right) &= \int_{\Omega}\mathbf{1}_{\cup_{j=1}^{n} A}(x)\ dx = \sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\mathbf{1}_{A_j}(x)\ dx \\ &= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}$ es probabilidad. Además, de (1.1) se ve que la probabilidad de los elementos de $\mathcal{A}$ no depende de la parametrización, por lo que está bien definida la probabilidad. ■

Este espacio de probabilidad es el que usaremos para modelar el lanzamiento de una moneda balanceada un número infinito de veces. Para esto, definamos para todo $x \in \Omega$,

$$Tx = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ 2x - 1 & \text{si } 1/2 < x < 1 \end{cases} \quad ; \quad d_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ 1 & \text{i } 1/2 < x < 1 \end{cases},$$

y $d_i(x) = d_1(T^{i-1}x)$, para $i \geq 2$. Las siguientes gráficas muestran a T y los primeros elementos de la sucesión de funciones $(d_j)_j$.



Proposición 1.2 *Para todo $x \in \Omega$ se cumple que*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x)}{2^i}.$$

Demostración. Sean $x \in \Omega$, $n \geq 1$, y $T^0 s := s$, entonces

$$\begin{aligned} d_{n+1}(x) &= d_1(T^n x) = d_1\left(T^{n-1} T x\right) \\ &= d_n(Tx). \end{aligned}$$

Ahora verificamos por inducción que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x)}{2^i} < x \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x)}{2^i} + \frac{1}{2^n}, \text{ para } x \in \Omega \text{ y } n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Sean $x \in \Omega$ y $n \geq 1$.

Si $n = 1$, entonces si $x \in (0, 1/2]$, se tiene que $d_1(x) = 0$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x)}{2^i} = 0 < x \leq \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x)}{2^i} + \frac{1}{2^n}.$$

Análogamente, si $x \in (1/2]$, se tiene que $d_1(x) = 1$ y así,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{2^i}=\frac{1}{2}<x\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{2^i}+\frac{1}{2^n}.$$

Ahora supongamos se satisface (1.2) para $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$x\in\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{2^i},\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{2^i}+\frac{1}{2^n}\right].$$

Sea

$$\tau=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{2^i}+\frac{1}{2^{n+1}},$$

el punto medio del intervalo. Si $x\leq\tau$, entonces $d_{n+1}(x)=d_n(Tx)=0$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{d_i(x)}{2^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{2^i}<x\leq\tau=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{d_i(x)}{2^i}+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

De la misma manera, si $x>\tau$, $d_{n+1}(x)=d_n(Tx)=1$ y

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{d_i(x)}{2^i}=\tau<x\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{2^i}+\frac{1}{2^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{2^i}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{d_i(x)}{2^i}+\frac{1}{2^{n+1}},$$

por lo que (1.2) se cumple para $n+1$.

Luego, dado que

$$\frac{1}{2^n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

entonces se sigue al tomar el límite $n\to\infty$ en (1.2) que para $x\in\Omega$,

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i(x)}{2^i}.$$

■

Observemos que no se puede tener que $d_i(x)=0$ para todo i mayor a alguna N, pues de existir tal N, entonces

$$x=\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i(x)}{2^i},$$

pero hemos demostrado que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(x)}{2^i}<x,\ \text{para toda } n\in\mathbb{N}.$$

La sucesión $(d_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es precisamente la expansión binaria del número x. También usaremos la notación $0.d_1(x)\,d_2(x)\,d_3(x)\,..._2=x$.

Ejemplo 1.1 Sea $x = 1/2$, entonces

$$\begin{aligned} d_1(x) &= 0, \\ d_2(x) &= d_1(Tx) = d_1(1) = 1, \\ d_3(x) &= d_1\left(T^2x\right) = d_1(T(1)) = 1, \\ &\vdots \\ d_n(x) &= 1, \text{ para } n \geq 2. \end{aligned}$$

La expansión binaria de $1/2$ es entonces $0.0111..._2$

Ejemplo 1.2 Sea $x = 1/3$, entonces

$$\begin{aligned} d_1(x) &= 0, \\ d_2(x) &= d_1(Tx) = d_1(2/3) = 1, \\ d_3(x) &= d_1\left(T^2x\right) = d_1(1/3) = 0, \\ d_4(x) &= d_3\left(T^1x\right) = d_1(1/3) = 0 \end{aligned}$$

Entonces $1/3 = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{2j} := 0.010101..._2$

Ejemplo 1.3 Los primeros dígitos de la expansión binaria de π es

$$\pi = 0.00100100001111110110101010100010..._2$$

Un número puede tener dos posibles representaciones binarias, como

$$0.5 = 0.1_2 = 0.01111..._2,$$

pero una de ellas terminará en ceros, y nuestra definición tomará aquélla que no termine en ceros.

Continuando con la idea de asociar cada lanzamiento de una moneda balanceada un número infinito de veces con un número, se tiene que para cada número, hay un juego de monedas del que hemos mencionado. El problema está en que, de acuerdo a nuestro modelo, hay lanzamientos de sucesiones para los que no existe un número (los que caen ceros después de un cierto número de lanzamientos). En la siguiente subsección veremos que estos eventos son prácticamente imposibles de ocurrir.

Veamos algunos ejemplos de probabilidades de eventos.

Ejemplo 1.4 Sea A el evento en el que 1 aparece en el primer lanzamiento, entonces

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}[x \in \Omega : \ d_1(x) = 1] = \mathbb{P}((1/2, 1]) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 1.5 Sea B el evento en el que 0 ocurre en el n-ésimo lanzamiento.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}[x \in \Omega : \ d_n(x) = 0] = 2^{n-1}\mathbb{P}\left(\left(0, \frac{1}{2^n}\right]\right) \\ &= 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esto debido a que los intervalos en los que $d_n(x) = 1$, son todos de la misma longitud, y esta longitud es precisamente la del intervalo $(0, 2^{-n}]$.

Ejemplo 1.6 Sea C el evento en el que los primeros n lanzamientos aparecen exactamente k unos.

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left[x \in \Omega : \ \sum_{i=1}^{n} d_i(x) = k\right] = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n},$$

pues hay $\binom{n}{k}$ maneras de que una sucesión tenga exactamente k unos.

1.2 Ley de Grandes Números de Borel y Números Normales

El siguiente resultado nos dice que para un número grande de lanzamientos, la probabilidad de que la diferencia entre $1/2$ y la frecuencia de unos sea grande, es cero. Lo obtuvo el matemático suizo Daniel Bernoulli (1700 - 1782).

Teorema 1.1 (Ley de Grandes Números de Bernoulli) *Para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left\{x \in \Omega : \ \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i(x) - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Para su demostración se requieren otros resultados y definiciones que se enunciarán y demostrarán
enseguida. Este resultado también se conoce como Ley Débil de Grandes Números.

Para todo $x \in \Omega$, las $n-$ésima función de Rademacher será

$$r_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_n(x) = 1, \\ -1 & \text{si } d_n(x) = 0. \end{cases}$$

También puede escribirse $r_n(x) = 2d_n(x) - 1$. Estas funciones fueron estudiadas por el matemático alemán Hans A. Rademacher (1892 -1969).

Además, para toda $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$t_n(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x).$$

En un juego de monedas, si se gana \$1 cuando sale 1 y se pierde \$1 al salir 0, entonces $r_n(x)$ dice cuánto se ganaría en el $n-$ésimo lanzamiento y $t_n(x)$, la suma total de dinero acumulado hasta el $n-$ésimo lanzamiento, esto si se comenzara con \$0.

Lema 1.1 *Para todos $m, n \in \mathbb{N}$ distintos, se cumple que*

(i) $\int_0^1 r_m(x)\,dx = 0$.

(ii) $\int_0^1 t_m(x)\,dx = 0$.

(iii) $\int_0^1 r_m(x)\,r_n(x)\,dx = 0$.

(iv) $\int_0^1 t_m^2(x)\,dx = m$.

(v) $\int_0^1 t_m^4(x)\,dx \leq 3m^2$.

Demostración. (i) Para $m = 1$,

$$\int_0^1 r_m(x)\,dx = -1\int_0^1 \mathbf{1}_{\left(0,\frac{1}{2}\right]}(x)\,dx + 1\int_0^1 \mathbf{1}_{\left(\frac{1}{2},1\right]}(x)\,dx = 0.$$

Si suponemos $\int_0^1 r_m(x)\,dx = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r_{m+1}(x)\,dx &= \int_0^1 [2d_{m+1}(x) - 1]\,dx = \int_0^1 [2d_m(Tx) - 1]\,dx \\
&= \int_0^1 r_m(Tx)\,dx = \int_0^{1/2} r_m(Tx)\,dx + \int_{1/2}^1 r_m(Tx)\,dx \\
&= \int_0^1 r_m(x)\,dx + \int_0^1 r_m(x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

(ii) $\int_0^1 t_m(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} r_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 r_j(x)\,dx = 0.$

(iii) Suponer s.p.g. que $m < n$, entonces en cada intervalo diádico de orden $n-1$ (del tipo $\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n-1}}\right]$, para algunas $a_i \in \{0,1\}$). r_m es constante y r_n es -1 a la izquierda y 1 a la derecha. Entonces

$$\int_0^1 r_m(x)\,r_n(x)\,dx = 0.$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t_m^2(x)\,dx &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{m} r_i(x)\right]\left[\sum_{i=1}^{m} r_i(x)\right] dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 r_i^2(x)\,dx + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \int_0^1 r_i(x)\,r_j(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 1dx = m.
\end{aligned}$$

(v) $t_m^4(x)$ nos deja cuatro tipos de productos; $r_i^4(x)$, $r_i^2(x)\,r_j^2(x)$, $r_i^2(x)\,r_j(x)\,r_k(x)$, $r_i^3(x)\,r_j(x)$ y $r_i(x)\,r_j(x)\,r_k(x)\,r_l(x)$ para i, j, k y l distintos entre sí.

Como $r_i^4(x) = r_i^2(x)\,r_j^2(x) = 1$, $r_i^2(x)\,r_j(x)\,r_k(x) = r_j(x)\,r_k(x)$ y $r_i^3(x)\,r_j(x) = r_i(x)\,r_j(x)$, entonces tenemos que

$$\int_0^1 t_m^4(x)\,dx = m + 3(m-1)\,m = 3m^2 - 2n \leq 3m^2,$$

pues hay m términos de la forma $r_i^4(x)$, $3m(m-1)$ de la forma $r_i^2(x)\,r_j^2(x)$ y el resto de las integrales se anulan. ■

Sólo falta un resultado más para poder demostrar la Ley de Grandes Números de Bernoulli. Éste en realidad es un caso particular del obtenido por el matemático ruso Pafnuty L. Chebyshev (1821 –1894).

Teorema 1.2 (Desigualdad de Chebyshev) *Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función escalón no negativa y α un número positivo, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\{x \in \Omega : \ f(x) > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} f(x)\, dx.$$

Demostración. Si $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k I_{(a_{k-1}, a_k]}(x)$, con $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ y c_j no negativos. Entonces si existe k tal que $c_k > \alpha$, entonces es claro que

$$\{x \in \Omega : \ f(x) > \alpha\} = \underset{c_i \geq \alpha}{\cup} (a_{i-1}, a_i].$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\, dx &= \sum_{j=1}^{n} c_j (a_j - a_{j-1}) \geq \sum_{c_j > \alpha} c_j (a_j - a_{j-1}) \\ &\geq \alpha \sum_{c_k > \alpha} (a_k - a_{k-1}) = \alpha \mathbb{P}\left(\{x \in \Omega : \ f(x) > \alpha\}\right). \end{aligned}$$

Observemos que si $c_k < \alpha$, $\forall c_k$, entonces $\{x \in \Omega : \ f(x) > \alpha\} = \varnothing$ y por tanto

$$\mathbb{P}\left(\{x \in \Omega : \ f(x) > \alpha\}\right) = 0 \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} f(x)\, dx.$$

■

Ahora sí tenemos las herramientas necesarias para dar la demostración de la Ley de Grandes Números de Bernoulli.

Demostración (L.G.N. de Bernoulli). Usando la desigualdad de Chebyshev, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\{x\in\Omega:\ \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i(x)-\frac{1}{2}\right|\geq\varepsilon\right\}\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{x\in\Omega:\ \left|\sum_{i=1}^{n}d_i(x)-\frac{n}{2}\right|\geq n\varepsilon\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left\{x\in\Omega:\ \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[2d_i(x)-1\right]\right|\geq n\varepsilon\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left\{x\in\Omega:\ \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}r_i(x)\right|\geq n\varepsilon\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\{x\in\Omega:\ |t_n(x)|>2n\varepsilon\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left\{x\in\Omega:\ t_n^2(x)>4n^2\varepsilon^2\right\}\right)\\
&\leq \frac{1}{4n^2\varepsilon^2}\int_0^1 t_n^2(x)\,dx=\frac{1}{4n^2\varepsilon^2}n \quad \text{(Lema 1.1.4)}\\
&= \frac{1}{4n\varepsilon^2}\overset{n\to\infty}{\to}\infty.
\end{aligned}$$

■

Definición 1.1 Sea $S_n(x)=\sum_{j=1}^{n}d_j(x)$ (el número de unos que aparecen en los primeros n dígitos de la expansión binaria de x). Diremos que $A\subset\Omega$ es un **conjunto nulo** si para todo $\varepsilon>0$ existe una sucesión de subconjuntos de Ω, $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$, tales que

$$A\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_j)<\varepsilon.$$

Observemos que $\mathbb{P}$ está definida sólo para uniones finitas de intervalos, sin embargo, esta definición asigna una probabilidad a ciertos tipos de conjuntos que no necesariamente son de este tipo. Por ejemplo, los números normales, que a continuación veremos, tienen probabilidad 1 (Ley de Grandes Números de Borel) y es un conjunto totalmente disconexo (Proposición 1.3.2).

Definición 1.2 $N\subseteq\Omega$ definido como

$$N=\left\{x\in\Omega:\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n(x)}{n}=\frac{1}{2}\right\}$$

es llamado conjunto de **Números Simplemente Normales** en base dos.

A continuación veremos la generalización de la Ley de Grandes Números de Bernoulli, cuya demostración la dio Borel a principios del siglo pasado.

Teorema 1.3 (Ley de Grandes Números de Borel) $\Omega - N$ *es un conjunto nulo.*

Este resultado también se conoce como Ley Fuerte de Grandes Números.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $A_n = \{x \in \Omega : \ |t_n(x)| > n\eta_n\}$, donde

$\eta_n = cn^{-1/8} > 0$ para alguna $c > 0$ tal que

$$\frac{3}{c^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}} < \varepsilon.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(\{x \in \Omega : \ |t_n(x)| > n\eta_n\}) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{x \in \Omega : \ t_n^4(x) > n^4\eta_n^4\right\}\right) \\
&\leq \frac{1}{n^4\eta_n^4}\int_0^1 t_n^4(x)\,dx \quad \text{(Desigualdad de Chebyshev.)} \\
&\leq \frac{3n^2}{n^4\eta_n^4} \quad \text{(Lema 1.1.5.)} \\
&= \frac{3}{n^2\eta_n^4}.
\end{aligned}$$

N^c es nulo debido a que $N^c \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) < \varepsilon$, lo cual demostramos a continuación.

Dado que para $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ (equivalentemente, $|t_n(x)| \leq n\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{S_n(x)}{n} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} d_n(x)}{n} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(r_n(x)+1)}{2n} \\
&= \frac{t_n(x)+n}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

pues $|t_n/n| \leq \eta_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Por lo tanto $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq N$ y de aquí se sigue la afirmación.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2\eta_n^4}\\ &= \frac{3}{c^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Los números con doble representación binaria son racionales de la forma $p/2^k \in \Omega$, para $k \in \mathbb{Z}_+$ y $p \in \mathbb{N}$. Es claro que (en cualquiera de sus dos representaciones) esta clase de números son no-normales, es decir, que ocurren con probabilidad cero. Por tanto el modelo para el lanzamiento de una moneda un número infinito de veces es adecuado.

A pesar de que casi todo número es normal en base dos, los números no-normales tienen algunas
características interesantes.

Proposición 1.3 *(i) N^c es no numerable.*

(ii) N^c es denso en Ω.

(iii) Se cumplen (1) y (2) para N.

Antes de demostrar esta proposición, veamos algunas propiedades de conjuntos nulos.

Lema 1.2 *(i) Si $A \subseteq \Omega$ es nulo y $B \subseteq A$ es nulo, entonces B es nulo.*

(ii) Los singuletes (conjuntos con un único elemento) son nulos.

(iii) Si A_1, $A_2, \ldots$ son nulos, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es nulo.

(iv) Los conjuntos numerables de Ω son nulos.

Demostración del Lema 1.2. (i) y (ii) son obvios. Ahora, si A_1, $A_2, \ldots$ son nulos y $\varepsilon > 0$, sean $(I_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(I_{2k})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots$ sucesiones de intervalos tales que, para toda $j \in \mathbb{N}$,

$$A_j \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{jk} \text{ y } \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(I_{jk}) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Entonces

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{jk} \text{ y } \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(I_{jk}\right) < \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon,$$

de donde se sigue que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es nulo, lo que demuestra (iii).

El inciso (iv) es una consecuencia directa de (ii) y (iii). ■

Demostración de la Proposición 1.3.

(i) Consideremos el conjunto $A = \{x \in \Omega : \ x = 0.11a_1 11a_2 11a_3 ..._2 \text{ tal que } a_i \in \{0,1\}, \forall a_i\}$.

Notemos que $A \subset N^c$, pues si $x = 0.11a_1 11a_2 11a_3 ..._2 \in \Omega$,

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \frac{1+1+a_1+1+1+a_2+1+1+a_3+\cdots+d_n(x)}{n} \\ \geq & \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+1+0+1+1+0+1+1+0+\cdots+d_n(x)}{n} \\ = & \quad \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

entonces $x \notin N$.

Ahora, A es biyectable con $\{0,1\}^{\infty} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots$, que es no-numerable. Entonces N^c contiene un subconjunto no-numerable y por tanto es no-numerable.

(ii) Sean $x = 0.x_1 x_2 ..._2, \ y = 0.y_1 y_2 ..._2 \in \Omega$ con $x < y$. Sea $k \geq 0$ tal que $x_j = y_j$ si $j \leq k$ y $x_j \neq y_j$ si $j > k$ (observemos que esto implica que $x_{k+1} = 0$ y $y_{k+1} = 1$). Entonces el número

$$z = 0.x_1 ... x_k x_{k+1} 01111..._2$$

es no-normal y además $x \leq z \leq y$. Por lo tanto N^c es denso en Ω.

(iii) Sea $I \subset \Omega$ un intervalo. I números normales, pues de otra forma tendríamos que $I = I \cap N^c \subset N^c$ y $\mathbb{P}(I) > 0$, pero I es nulo (lema 1.2). Entonces N es denso en Ω.

Por otro lado, si N no fuese no-numerable, entonces el inciso (4) del lema 1.2 nos diría que N es nulo, pero sabemos que N no es nulo. Por lo tanto N es no-numerable.

■

1.3 Generalizaciones

En lugar de una moneda, consideremos una ruleta con m ($m \geq 2$) opciones equiprobables. Cada opción la numeramos del 0 al $m-1$. Para $m=2$ es el mismo modelo que el de la moneda balanceada. Para $m=6$, por ejemplo, sería un dado balanceado, o bien, podemos modelar los resultados de girar una ruleta con m opciones.

La Ley Débil de Grandes Números es

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{x \in \Omega : \left|\frac{1}{n}r_{n,k}(x) - \frac{1}{m}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0, \quad \forall\varepsilon > 0 \ \forall k \in \{0, 1, \ldots, m-1\},$$

donde $r_{n,k}(x)$ es el número de veces que se ha observado el número k en la ruleta hasta el $n-$ésimo tiro. Además, para cada $m \geq 2$, el conjunto

$$N_m = \left\{x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} r_{n,k}(x) = \frac{1}{m}\right\}$$

es conocido como los números normales en base m. Y el conjunto $\mathcal{N} = \bigcap_{n\geq 1} N_n$ es conocido como el conjunto de los números normales.

Tal como en el caso de la moneda balanceada, cada N_m es denso en Ω y además no numerable; lo mismo ocurre con sus complementos. También esto es cierto para N.

En este caso, la Ley Fuerte de los Grandes Números nos dice que para todo $m \geq 2$, N_m^c es nulo para cada m.

La demostración de estos resultados es análoga a las demostraciones para la moneda balanceada lanzada un número infinito de veces.

Bibliografía

[1] Bailey, D., Borwein, P. & Plouffe, S. (1997). On the rapid computation of various polylogarithmic constants. *Mathematics of Computation*, **Vol. 66**, núm. 218, págs 903–913.

[2] A. Belshaw, J. (2005). *On the Normality of Numbers.* Tesis de Maestría. Simon Fraser University. Canadá.

[3] Belshaw, A. & Borwein, P. (2006). Strong Normality of Numbers. Manuscrito.

[4] Billinsley, P (1986). *Probability and Measure.* Segunda Edición. John Wiley & Sons Inc.

[5] Borel, É. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Pa*

[6] Kac, M. (1959). *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory.* New York, Wiley.

[7] Khoshnevisan, D. (2006). On the normality of normal numbers*. Clay Mathematics Institute Annual Report 2006*, pág. 15 (continúa en págs. 27-31).

[8] Schmidt, W. (1960). On normal numbers. *Pacific Journal of Mathematics,* **Vol. 10**, núm. 2, 661-672.