Probabilidad
Agosto-diciembre 2010
Tarea No. 4

Fecha de entrega: ***martes 14 de septiembre del 2010*** **a las 11 horas**

1. Para $0 < p < 1$, considere la función $I_p : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$I_p(x) = (1-x)\log\frac{1-x}{1-p} + x\log\frac{x}{p}.$$

   (a) Pruebe que $I_p(x)$ es una función convexa sobre $[0, 1]$.
   (b) Pruebe que $I_p(x)$ alcanza su mínimo en $x = p$, en cuyo caso $I_p(p) = 0$.

2. Considere la campana de Gauss o densidad normal

$$\phi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0.$$

   (a) Use la computadora para graficar esta función para distintos valores de μ y σ^2.
   (b) Encuentre los puntos críticos de esta función.
   (c) En base a los dos incisos anteriores, ¿cuál es su interpretación de μ y σ? De su propia interpretación, no la que dan los libros.
   (d) Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ ¿qué interpretación tiene el área bajo la campana de Gauss en el intervalo $(-3, 3)$.?
   (e) En un proceso de producción es usual suponer que el proceso se tiene bajo control de calidad si una característica que se mide sigue una distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Se produce una alarma en el proceso de producción cuando esta característica se encuentra fuera del intervalo $(-3, 3)$ por lo que se tiene que revisar el proceso. Esta alarma puede ser falsa, cuando el dato se encuentra dentro de la variabilidad natural de la distribución normal considerada, o bien la alarma es real, cuando existe una falla en el sistema de producción. ¿Cuál es el número esperado de falsas alarmas? Sugerencia: Use ensayos Bernoulli e identifique la distribución que debe usarse para modelar las falsas alarmas.

3. Use el Teorema de de Moivre-Laplace para encontrar una aproximación de la probabilidad que en 1000 lanzamientos de una moneda el número de águilas obtenidas esté entre 450 y 550.

4. Estamos interesados en la probabilidad de obtener exactamente 450 águilas en 1000 lanzamientos. O sea $\mathbb{P}(S_{1000} = 450)$ donde S_{1000} tiene una distribución Binomial $B(1000, 1/2)$.

   (a) ¿Cuál es la expresión exacta para $\mathbb{P}(S_{1000} = 450)$? No la calcule.
   (b) ¿Se puede usar la aproximación de Poisson? ¿Por qué?

(c) Use el Teorema del Límite Local de de Moivre-Laplace para obtener una aproximación para $\mathbb{P}(S_{1000} = 450)$.

(d) Use el Teorema de Desviaciones Grandes para encontrar una cota para $\mathbb{P}(S_{1000} > 450)$.

(e) Use la Desigualdad de Chebyshev para encontrar una cota para $\mathbb{P}(|S_{1000} - 450| > 50)$.

(f) ¿Cuántos lanzamientos debemos hacer para asegurarnos que $\mathbb{P}(|S_n - n/2| > 0.01) \simeq 0.01$?

5. Consideremos una sucesión de ensayos Bernoulli con probabilidad de éxito p y sea X el número de fallas antes del primer éxito.

   (a) Demuestre que

   $$\mathbb{P}(X = k \mid S_n = 1) = \frac{1}{n-1}, k = 0, ..., n-1.$$

   (b) Interprete este resultado. Observe que el resultado no depende de p.

6. La probabilidad de acertar en un blanco es 0.001. Se realizan 5000 disparos de forma independiente.

   (a) ¿Qué distribución usaría para modelar el número de aciertos en 5000 disparos? ¿Por qué?

   (b) Calcular la probabilidad de acertar en el blanco dos o más veces en una serie de 5000 disparos.

   (c) ¿Cuál es el número esperado de aciertos en 5000 disparos?

7. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

   (a) Encuentre la función $g(t) = E[t^X]$. ¿Para qué valores de t está definida g?

   (b) Encuentre $g^{(k)}(0)$ para $k = 0, 1, ...$

   (c) ¿Qué interpretación tiene la función g?. Sugerencia: recuerde el tema de series de potencia en cálculo.

8. Escriba apuntes de los temas expuestos por David Reynoso y David Torres. Describa con claridad los problemas resueltos, así como los principales resultados, resaltando los puntos importantes de las demostraciones. Incluya ejemplos y aplicaciones de los cada uno de los teoremas límites mostrados.

9. Elabore un ensayo que incluya las biografías de Abraham de Moivre, Pierre-Simon Laplace y Paul Lévy.