Probabilidad I

Agosto-diciembre 2010

Tarea 7

Entregar el sábado 4 de diciembre del 2010

1. Usando función generadora de momentos, encuentre los momentos de las siguientes distribuciones:

   (a) Normal $N(\mu, \sigma^2)$.

   (b) Gamma $G(\alpha, \beta)$.

   (c) Binomial negativa $BN(r, p)$.

   (d) Poisson $P(\lambda)$.

2. Considere la densidad del semicírculo (o de Wigner) en $[-R, R]$, $R > 0$,

$$f(x) = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}1_{\{\|x\| \leq R\}}.$$

   (a) Encuentre los momentos de esta distribución.

   (b) Investigue sobre los números de Catalán y explique cómo surgen en problemas de combinatoria. ¿Qué relación existe con el resultado del inciso (a).?

   (c) Encuentre la función de distribución de la densidad del semicírculo.

3. Sea X una variable aleatoria con densidad gama $G(2, 2)$ e Y una variable aleatoria independiente de X con distribución del semicírculo en $[-R, R]$.

   (a) Encuentre la densidad de $V = X^{1/2}$.

   (b) Encuentre la densidad de $Z = VY$ (Sugerencia: Use la fórmula de la densidad del producto de variables aleatorias independientes que vimos en el curso).

   (c) Comente el resultado.

4. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con la misma función de densidad f y función de distribución F. Sea

$$\overline{M}_n = \max(X_1, ..., X_n), \qquad \underline{M}_n = \min(X_1, ..., X_n)$$

   y $R_n = \overline{M}_n - \underline{M}_n$.

   (a) Pruebe que la distribución conjunta de $\overline{M}_n$ y $\underline{M}_n$ está dada por

$$F_{\overline{M}_n,\underline{M}_n}(x, y) = \mathbb{P}(\overline{M}_n \leq x, \underline{M}_n \leq y) = \begin{cases} F^n(x) - [F(x) - F(y)]^n, & x > y, \\ F^n(x) & x \leq y \end{cases}.$$

(b) Use (a) para encontrar la densidad conjunta de $f_{\overline{M}_n,\underline{M}_n}(x,y)$ de $\overline{M}_n$ y $\underline{M}_n$. Observe que $\overline{M}_n$ y $\underline{M}_n$ no son variables aleatorias independientes.

(c) Encuentre la densidad f_{R_n} de R_n.

(d) En particular, considere que f es la densidad de la distribución uniforme en $[0,1]$. Encuentre las expresiones correspondientes para $F_{\overline{M}_n,\underline{M}_n}$ y f_{R_n}.

5. Considere la distribución de Laplace $L(\mu,\lambda)$ con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}e^{-|x-\mu|/\lambda}, \quad -\infty < x < \infty; \quad \lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}.$$

   (a) Encuentre su función generadora de momentos.

   (b) Usando la función generadora de momentos encuentre los momentos de esta distribución.

   (c) Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con distribución de Laplace $L(\mu_1,\lambda), ..., L(\mu_n,\lambda)$, respectivamente. ¿Cuál es la distribución de $S_n = X_1 + ... + X_n$?¿Por qué?

6. Sea $n = 100$ y $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias con la misma distribución de Poisson $P(\lambda)$, $\lambda = 0.02$. Sea $S_n = X_1 + ... + X_{n.}$ Use el teorema central del límite para evaluar $\mathbb{P}(S \geq 3)$ y compare el resultado con la probabilidad exacta del evento $S \geq 3$.

7. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con la misma distribución tal que $n^{-1/2}(X_1 + ... + X_n)$ tiene la misma distribución para $n = 1, 2, ...$ Pruebe que si $\mathbb{E}(X_i) = 0$ y $Var(X_i) = 1$ la distribución común de las X_i's debe ser $N(0,1)$.

8. Considere la densidad de la distribución de Cauchy $C(\mu,\lambda)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{(x-\mu)^2 + \lambda}, \quad -\infty < x < \infty; \quad \lambda > 0, \mu \in \mathbb{R}.$$

   (a) Pruebe que esta distribución no tiene momentos.

   (b) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con distribuciones de Cauchy $C(\mu,\lambda_1)$ y $C(\mu,\lambda_2)$ respectivamente. Use la fórmula de convolución de densidades para encontrar la distribución de $Y = X_1 + X_2$.

   (c) ¿Cómo se generalizaría el resultado en (b) para la suma de n variables aleatorias independientes con distribución de Cauchy?

9. Sea N una variable aleatoria con valores en los enteros nonegativos y función generatriz de probabilidades ϕ_N. Sea $X_1, X_2, ...$una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución discreta con función generatriz de probabilidades ϕ e independiente de N. Sea

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

(a) Use la propiedad de anidamiento de la esperanza condicional para demostrar que Y tiene función generatriz de probabilidades $\phi_Y(t) = \phi_N(\phi(t))$, $|t| \leq 1$.

(b) Suponga que N tiene distribución de Poisson de media 1 y X_i tienen la misma distribución logarítmica de parámetro $0 < p < 1$. ¿Qué distribución tiene Y?

10. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} y(1+x)^{-4} e^{-y(1+x)^{-1}}, & x, y \geq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}.$$

(a) Encuentre las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

(b) Encuentre las densidades condicionales $f_{X|Y}(x\,|y)$ y $f_{Y|X}(y\,|x)$

(c) Encuentre $\mathbb{E}(Y\,|X)$.

11. Estudie el tema de la distribución Beta $B(\alpha, \beta)$ y haga un resumen del mismo considerando la función de densidad, momentos y su relación con otras distribuciones, entre otros aspectos.