Editores:

Lino Feliciano Reséndis
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas
lfro@correo.azc.uam.mx

Luis Manuel Tovar
Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN
Departamento de Matemáticas
tovar@esfm.ipn.mx

1a. Edición, 2011

Fecha de edición: 25 de octubre de 2011

Editorial: UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Coedición:

Instituto de Matemáticas, UNAM
Av. Universidad 3000
04510 – México, D.F.

Sociedad Matemática Mexicana
Carretera México-Cuernavaca Km 23.5,
Av. Cipreses s/n,
Col. San Andrés Totoltepec,
14400 – México, D.F.

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
Edificio 9 U.P. Adolfo López Mateos
Col. San Pedro Zacatenco
07730 – México, D.F.

ISBN: 978-968-36-3591-4 (Aportaciones Matemáticas)
ISBN: 978-968-36-3592-1 (Serie Comunicaciones)
ISBN: 978-607-02-2763-9

Impreso y hecho en México.

Estas memorias se imprimieron con el apoyo financiero de:
la Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN; la Sociedad Matemática Mexicana a través del fondo de Aportaciones Matemáticas, y el Instituto de Matemáticas, UNAM.

Imagen realizada por el Prof. Eduardo Virueña Silva.

Contenido

Prólogo

El presente volumen forma parte de las actividades para conmemorar el 50 aniversario de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) del Instituto Politécnico Nacional (IPN). La ESFM comienza sus actividades en Marzo de 1961, ofreciendo la carrera de Licenciado en Física y Matemáticas. En ese entonces la Facultad de Ciencias de la UNAM era la única en México que ofrecía una formación científica en ciencias exactas a través de su licenciatura en Física y su Licenciatura en Matemáticas. Es decir, dos licenciaturas distintas. Así la licenciatura en Física y Matemáticas nace con la idea de preparar físicos con una buena base de Matemáticas y matemáticos con una buena base de Física. Lo anterior a través de una currícula que comprendía un tronco común de materias en los primeros cuatro semestres, así como el llevar entre el quinto y el octavo semestre, al menos dos materias de Física para los que fueran para matemáticos y al menos dos materias de Matemáticas para los que fueran para físicos. Con lo anterior, se pretendía formar científicos y profesionales que trabajaran en la investigación pura y aplicada, así como en la industria, la banca y las instituciones financieras; con un perfil mas interdisciplinario y con ello ampliar la oferta educativa en ciencias, al ofrecer algo curricularmente diferente a lo ofertado por la UNAM.

Esa ha sido la misión y filosofía de la ESFM a lo largo de los últimos 50 años. Cuya infraestructura se enriqueció poco después de su inauguración, al crearse los estudios de posgrado no solo en ambas disciplinas, sino también en Ingeniería Nuclear y en Ciencia de Materiales. La oferta educativa de la ESFM se amplió a fines del siglo pasado con la creación de la Licenciatura en Ingeniería Matemática.

Afortunadamente a lo largo de estos 50 años han sido muchos los egresados de la ESFM de excelente calidad, cuya producción científica y trabajo en distintas instituciones del sector público y privado han sido ampliamente reconocidos a través de premios nacionales e internacionales, homenajes y distinciones de diversa índole.

Para la elaboración del presente volumen se invitó a un grupo de reconocidos matemáticos, profesores y/o egresados de la ESFM -varios de ellos con distinciones de carácter nacional e internacional- quienes han desarrollado su trabajo en distintas instituciones y en áreas de la Matemática y sus aplicaciones y a los que se les hizo la siguiente petición:

“¿Podrías hacerme un artículo panorámico en donde nos describas cual ha sido el desarrollo de tu área o de alguna de las líneas de tu área en los últimos 50 años?”.

A través de la pronta y entusiasta respuesta que se obtuvo, pudimos percibir el gran cariño que los egresados de la ESFM le tienen a su Alma Mater. Nobleza obliga, cuando se ha recibido de la institución que te formó una educación de calidad, que le ha dado a la ESFM un alto reconocimiento no solo nacional, sino inclusive de varias instituciones de prestigio del extranjero. Debemos además hacer notar, el gran profesionalismo y seriedad con el que los autores llevaron a cabo su encomienda.

Así, esta publicación presenta quince artículos sobre el desarrollo de diferentes áreas y aspectos de la Matemática. Aunque no se pudieron cubrir todas las áreas en las que de manera más importante se han desarrollado los egresados de la ESFM, si se alcanza -en su conjunto- a presentar un panorama de su espectro profesional.

Deseamos agradecer al comité editorial de Aportaciones Matemáticas en particular a Luz de Teresa y Guillermo Pastor, por su generosidad y su pronta y entusiasta respuesta para que se pudiera llevar a cabo este volumen. A Gabriela Sanginés y Leonardo Espinosa quienes colaboraron de manera importante para la edición, siendo el puente entre Aportaciones Matemáticas y nosotros. A las autoridades de la ESFM, en particular a su Director el Dr. Adolfo Escamilla Esquivel por el apoyo financiero que nos brindó para cubrir el costo de la publicación. A Diana Denys Jiménez Suro, Alfonso Hernández Montes, Marco Antonio Pérez de la Rosa y Augusto Miss Paredes, así como a los revisores y árbitros, por su muy profesional trabajo en la revisión, formateo y disposición para estar en contacto con cada uno de los autores y hacer que cada uno de los artículos cumpliera con los estándares que exige Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana.

Finalmente deseamos dedicar este prólogo a Manuel Meda Vidal; primer jefe del departamento de Matemáticas de la ESFM y quien escribió el prólogo de lo que sería la actividad matemática de la ESFM durante 50 años.

Atentamente

Luis Manuel Tovar y Lino Feliciano Reséndis

Editores.

APORTACIONES MATEMÁTICAS
Comunicaciones **42** (2011) 1–23

PROBABILIDAD: TRES HITOS EN SU HISTORIA Y DINAMISMO ACTUAL

VÍCTOR M. PÉREZ ABREU C.

RESUMEN. Jacobo Bernoulli en el Siglo XVII y Andreí Kolmogorov y Kiyoshi Itô en el Siglo XX hicieron contribuciones fundamentales a la teoría matemática de la probabilidad. Esta disciplina es actualmente una importante y dinámica área de las matemáticas por su importancia en teoría y aplicaciones. Su estudio requiere de una formación balanceada de teoría y aplicaciones.

ABSTRACT. Jacob Bernoulli in the 17th Century and André Kolmogorov and Kiyoshi Itô in the 20th Century made cornerstone contributions to the mathematical theory of probability. The probability is nowadays a lively and dynamic branch of mathematics from both the theoretical and applied points of view. Its study requires an early study of the discipline as well as a balance between theory and practice.

INTRODUCCIÓN

Reto difícil la invitación que los editores de este volumen me hicieron para escribir sobre la historia de la probabilidad durante los 50 años de existencia de nuestra Alma Matter, la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

La teoría de la probabilidad es la rama de las matemáticas que estudia modelos de fenómenos aleatorios. Su reconocimiento como una rama bien establecida de las matemáticas fue un prolongado proceso, cuya dificultad y desarrollo se comparan y retroalimentan con su aplicación en problemas relevantes en otras disciplinas e inclusive en la matemática misma. Su dificultad también radica en que para su estudio se requiere del dominio de varios temas de matemáticas.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60-03,01A45,01A60.

Palabras Claves. Historical, 17th century, 20th century.

Agradezco los valiosos comentarios y sugerencias que para una versión de este escrito me han dado mis colegas Luís Gorostiza, Daniel Hernández y Constantín Tudor.

El objetivo de este ensayo es mostrar el desarrollo de la probabilidad como rama de las matemáticas a través de algunas consideraciones sobre tres hitos históricos -anteriores a 1961-, esperando poder contribuir a la comprensión y el interés por conocer la trascendencia, el dinamismo y la actualidad de la probabilidad en los últimos 50 años.

Este ensayo se ha escrito teniendo en mente como lector principalmente a alumnos de licenciatura en física matemáticas, ingeniería matemática, matemáticas, actuaría y matemáticas aplicadas. Se ha procurado, hasta donde da el conocimiento del autor, incluir referencias que están en español, siendo la bibliografía en este idioma bastante más extensa que los temas mencionados aquí. En particular, se citan algunos libros y artículos de divulgación escritos por colegas probabilistas y alumnos de México en las últimas cuatro décadas.

La Sección 1 presenta algunas reflexiones sobre la probabilidad y su posición como una rama de la matemática. En las Secciones 2 y 3 se comentan el entorno, importancia e impacto de dos de los trabajos más trascendentales en la teoría de la probabilidad: El *Ars Conjectandi* de Jacobo Bernoulli y los *Fundamentos de Probabilidad* de Andreí Kolmogorov, respectivamente. Ambos fueron eminentes científicos con una visión generalista que contribuyeron al desarrollo de las matemáticas y la probabilidad. Sus obras no sólo son producto de sus tiempos, sino que los trascienden.

En la Sección 4 se comenta brevemente el desarrollo del Análisis Estocástico, teoría matemática desarrollada en el Siglo XX, la cual tiene relaciones importantes con otras ramas de la matemática y es una herramienta fundamental en aplicaciones de vanguardia en física, finanzas y biología, entre otras disciplinas.

En la Sección 5 se mencionan algunos premios que han sido otorgados recientemente a matemáticos dedicados a la probabilidad, como muestra del dinamismo, actualidad y vitalidad de esta disciplina. Finalmente, en la Sección 6 se presentan recomendaciones para que un estudiante de matemáticas se inicie en el estudio de la teoría moderna de la probabilidad y los procesos estocásticos.

Los nombres de los científicos y matemáticos que se presentan en este ensayo no pretenden ser una historia de la ciencia, ni tampoco un análisis exhaustivo ni profundo sobre el legado de estos autores; únicamente ilustran la gran cantidad de ellos dedicados a la disciplina en sus distintas épocas y sus contribuciones muy generales. Para el estudio sobre los desarrollos históricos de la probabilidad, se remite al lector a la Introducción del libro de Alberto Ruiz Moncayo [1] (1938-1997) para el periodo anterior al Siglo XX, al artículo de Luis Gorostiza [2] para el Siglo XX y más detalladamente a los libros de Miguel Ángel García Álvarez [3].

1. Consideraciones generales

Es común encontrarnos en la vida cotidiana estadísticas que describen el mundo de lo aleatorio y las leyes del azar. Sin embargo, comprender las ideas y las nociones de la probabilidad es algo que no es fácil. Una de las razones es por la dificultad de entender lo aleatorio, aun para las mentes con educación matemática avanzada. Asimismo, varios temas de probabilidad no son intuitivos, lo que ha dado lugar a un sin número de paradojas, algunas simples de plantear (ver el Capítulo 10 de [4]).

Sobre la naturaleza del razonamiento probabilístico Mark Kac [5] (1914-1984) hizo una afirmación polémica en 1957: *¿Qué es lo que hace a la teoría de la probabilidad una disciplina distinta? Es ciertamente una rama del análisis y en un sentido más estrecho una rama de la teoría de la medida. Sus partes más rudimentarias se encuentran en la combinatoria, en donde frecuentemente se encuentran sus problemas más difíciles. Sin embargo, la teoría de la probabilidad trasciende esto y por mucho es un reto encontrar en forma precisa su ubicación y demarcación. Y no debemos tratar de establecer que es la probabilidad, sino mostrar que hace la probabilidad*.

A lo largo de la historia, ilustres científicos y matemáticos han considerado a la probabilidad. En el prefacio a su libro *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, escrito en 1865, Isaac Todhunter afirma que una de las razones que lo llevaron a escribir esta obra fueron las importantes aplicaciones de la probabilidad, sus contribuciones al análisis y la eminencia de aquellos que la habían cultivado.

La estadística, junto con los procesos estocásticos son ramas de la ciencia moderna en donde la probabilidad se usa de manera primordial. La física del Siglo XX, del brazo de la mecánica cuántica, ve al mundo de manera aleatoria, contrario a la física clásica. Asimismo, no es sorprendente que en el mundo de las finanzas los procesos estocásticos sean usados de manera diaria -siendo que las bolsas de valores funcionan como verdaderos casinos.

El ejemplo más sencillo para explicar un fenómeno aleatorio es el lanzamiento de una moneda, donde no se puede predecir cuál será el resultado de éste (a menos que se pudiera hacer un análisis detallado de las condiciones físicas del lanzamiento: posición inicial, velocidad exacta, masa, propiedad de elasticidad, entre otros). Es un hecho experimental comúnmente aceptado que lanzamientos sucesivos de esta moneda nos lleva a observar que la razón del número de águilas sobre el número de lanzamientos (la frecuencia relativa de águilas) se estabiliza alrededor de $\frac{1}{2}$, cuando el número de lanzamientos se incrementa.

Este problema es un ejemplo simple y fácil con el que se puede mostrar las dificultades para modelar matemáticamente un fenómeno aleatorio, de tal forma que la expresión "la frecuencia relativa se estabiliza" pueda formularse de manera precisa, y que en general no existe una única forma de hacerlo.

El primer intento de esta formulación se obtiene como un caso especial de la Ley de Los Grandes Números de Jacobo Bernoulli (1654-1705), publicado en su *Ars Conjectandi* de manera *post mortem* en 1713.

Una segunda formulación -más precisa- se puede hacer a partir de los trabajos de Emile Borel (1871-1956) en 1909, que dan lugar a los llamados Números de Borel, como lo explica Guillermo Basúlto Elías [6] en su tesis de licenciatura. Este modelo es una motivación interesante para mostrar que la integral de Bernhard Riemann (1826-1866) resulta una herramienta limitada para estudiar este fenómeno estocástico por lo que hay necesidad de usar otra integral que usualmente se estudia por primera vez en un segundo curso de análisis matemático: La integral de Henri Lebesgue (1875-1941) considerada en su tesis doctoral en 1902. Véase por ejemplo el libro de *Probability and Measure* de Patrick Billingsley.

Un problema fundamental en el desarrollo de la probabilidad lo fue, durante varios siglos, la noción misma de probabilidad. Entre otras se tienen: 1) *Probabilidad Clásica* es la razón del número de casos favorables a un evento sobre el número de casos posibles, lo cual permite dar un modelo matemático para los problemas de juegos de azar; 2) *Probabilidad Geométrica* (con múltiples aplicaciones actuales en biología, medicina, física e ingeniería) es la razón de área (longitud o volumen) del elemento geométrico de interés entre el área del elemento geométrico de referencia, lo que permite estudiar problemas del tipo de los planteados por el botánico y médico George Buffon (1707-1788): Se divide un plano con líneas paralelas de igual distancia d y se lanza una aguja de longitud 2r, ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja toque alguna de las líneas?; 3) La interpretación misma de la probabilidad como el número alrededor del cual se estabiliza la frecuencia relativa de un evento de interés llegó a ser considerada como definición de probabilidad (*probabilidad frecuencial*).

A pesar de lo anterior, con estos conceptos no rigurosos ni generales, se podían establecer reglas básicas comunes para los tres casos, y estudiar conceptos propios de la probabilidad tales como independencia, probabilidad condicional y sus correspondientes relaciones elementales.

Actualmente, la teoría de la probabilidad, como una disciplina matemática, se desarrolla a partir de axiomas (*espacio de probabilidad*), de la misma manera que la geometría, el álgebra y la topología. Los elementos y relaciones básicas de *espacio de probabilidad* permiten desarrollar toda una teoría, independientemente del significado concreto de esos elementos y relaciones.

Hay conceptos básicos de probabilidad que actualmente tienen su analogía con conceptos de la teoría abstracta de medida e integración y que por sí mismos no introducen una razón o dificultad adicional que ameriten desarrollar una teoría nueva. Así, una probabilidad P es una medida que asigna el valor 1 al conjunto universal; un evento (aleatorio) es un conjunto medible; una variable aleatoria X es una función medible con una función de distribución F asociada (continua por la derecha, con límite por la izquierda, no decreciente, $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$) y su correspondiente medida de Lebesgue-Stieltjes; la media es una integral; la función característica es una transformada de Fourier, etc. Igualmente, es posible establecer resultados del tipo: *dada una función de distribución, existe un espacio de probabilidad y una variable aleatoria con esa distribución y viceversa*.

Sin embargo, desde un punto de vista histórico, la *probabilidad condicional* y la *independencia* de eventos y variables aleatorias, son los conceptos matemáticos que plantean nuevas dificultades y le dan a la teoría de probabilidad su característica y sabor propios. Al mismo tiempo, junto a la esencia misma de probabilidad, son los gérmenes del tipo peculiar de problemas que estudia esta teoría, así como los elementos esenciales en la modelación estocástica de problemas relevantes que ocurren en fenómenos aleatorios tanto en diversas disciplinas, como en la tecnología, las finanzas, y de manera muy especial en la estadística matemática.

Por ejemplo, existen varios tipos de dependencia, siendo uno de los primeros el de cadenas de Markov, introducido por Markov. Los procesos de Markov son modelos cuya estructura es tal que olvidan el pasado y sólo consideran el presente. Otros tipos de dependencia como el de estacionalidad, aparecen igualmente en la teoría ergódica con orígenes en la teoría de comunicaciones electrónicas. Asimismo, la dependencia tipo martingala (que establece que lo que esperamos al tiempo t+s dado que conocemos la información hasta el tiempo s es precisamente lo que ocurre al tiempo s) es uno de los conceptos más usados en probabilidad y el análisis estocástico. Las martingalas -entes totalmente abstractos-, por ejemplo, son el lenguaje natural de los procesos en la bolsa de valores, en donde conceptos y propiedades de los mercados financieros se pueden describir en términos de ellas. Martingala es una calidad que aparece de manera natural en muchos problemas de probabilidad, aun desde la época de Pascal, como nos lo explica María Emilia Caballero [7] y en forma no matemática David Salsbug [8].

2. El Ars Conjectandi

Hay evidencia de que en Mesopotamia, Egipto, Grecia y el Imperio Romano se usaban diversos *mecanismos aleatorios* con el objeto de tomar decisiones o para la búsqueda del camino divino. Sin embargo, la búsqueda por entender los principios de algunos juegos de azar, como el lanzamiento de dados, no se inició hasta mediados del siglo XVI y está asociada con Girolamo Cardano (1501-1576), Niccolo Tartaglia (1499-1557) y Galileo Galilei (1564-1642), este último también interesado en la teoría de errores.

En el Siglo XVII se da un avance importante en el desarrollo de la probabilidad, debido, entre otras razones, a preguntas planteadas por la aristocracia de la época, que se dedicaba en sus ratos de ocio a los juegos de azar y las apuestas. De manera destacada fueron los problemas planteados por el Caballero de Meré, Antoine Gombaud, filósofo y literato que jugaba compulsivamente. En este periodo destaca la correspondencia que durante 1654 mantuvieron Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1662) sobre varios problemas planteados por de Meré a Pascal, incluido el famoso "Problema de los Dos Puntos" que nos describe María Emilia Caballero [9]. Para algunos colegas esta correspondencia marca un impulso importante en la historia de la probabilidad, ya que en algunos de los trabajos de Pascal se encontraban implícitos ideas y conceptos tales como probabilidad y esperanza condicional, martingala y cadena de Markov. Estos trabajos fueron continuados de manera relevante por Christiaan Huygens (1629-1695), quien introduce el término de valor esperado.

De especial importancia a fines del Siglo XVII, fueron los trabajos de Jacobo Bernoulli (1654-1705) publicados en 1713 de manera *post mortem* en su *Ars Conjectandi (El Arte de Predecir)* [10]. De la publicación del trabajo se encargó su sobrino Nicholas Bernoulli (1687-1759), quien se basó en las *Meditaciones Matemáticas de Jacobo*.

Ars Conjectandi es una obra de fundamental importancia en la teoría matemática de la probabilidad y la estadística por varias razones. La primera parte contiene comentarios y notas a los trabajos de Huygens sobre los juegos de azar, presentando métodos alternativos para resolver estos problemas. Su lectura es un buen ejemplo de lo que decía Paul Halmos sobre la lectura de matemáticas: haz tus propias preguntas, busca tus propios ejemplos y contraejemplos, descubre tus propias pruebas, etc.

La segunda parte contiene una presentación sistemática de las matemáticas de combinaciones y permutaciones de la época, e introduce los hoy llamados *Números de Bernoulli*. En la tercera parte se introducen 24 nuevos juegos de azar, algunos de los cuales parecen ser inventados con el objeto de ilustrar los métodos de solución a ellos.

En la última parte de su obra -la de mayor importancia- Jacobo Bernoulli propone aplicar, mediante analogía, las matemáticas de los juegos de azar a problemas prácticos surgidos en aspectos civiles, morales y económicos. Para ello formula y prueba el primer teorema límite en la historia de la probabilidad, y que es la contraparte teórica del hecho -decía Bernoulli bien conocido- de que la frecuencia relativa de un evento estará más cercana al verdadero valor si tomamos más observaciones: *"Considere la repetición sucesiva de un experimento aleatorio en el cual se considera exclusivamente la ocurrencia (éxito) o no ocurrencia (fracaso) de un evento. Si p es la probabilidad de éxito en cada repetición del experimento, entonces la probabilidad de que el número promedio de éxitos en las primeras n repeticiones difiera de p en más de una cantidad fija de antemano, es pequeña para n suficientemente grande"*.

En la terminología moderna, el resultado de Bernoulli establece que si n es el número de observaciones, X el número de éxitos en las n observaciones y p=r/(r+s), donde r y s son *números naturales*, entonces para cada d pequeño y cada natural c, existe n tal que

$$P(|X/n - p| > d) < 1/(1 + c).$$

Decía Jacobo Bernoulli que este resultado lo había pensado durante 20 años y que su originalidad y gran utilidad se combinaban con su dificultad, excediendo por mucho a las del resto de su obra. El resultado se conoce actualmente como *Ley de los Grandes Números de Bernoulli* y en opinión de varios autores es aquí donde se marca los inicios de la teoría matemática de la probabilidad.

En efecto, en la cuarta parte del *Ars Conjectandi*, Bernoulli trabaja con el concepto de probabilidad clásica (usando el término verosimilitud). Al mismo tiempo, su Ley considera también el concepto de probabilidad frecuencial que permite aproximar la probabilidad de ocurrencia de un evento, aun siendo imposible contar los casos favorables.

La demostración del resultado -la cual tiene un alto rigor matemático para su tiempo- se basa en cinco lemas de naturaleza puramente matemática y una proposición. Los primeros cuatro lemas están relacionados con análisis que involucran aspectos combinatorios y de potencias de binomios, y sólo el último contiene aspectos de límite. La formulación y demostración del resultado se da para p=s/(r+s), con r y s números naturales, lo cual es consistente con el concepto de probabilidad clásica que introduce Bernoulli es esta parte de su trabajo.

La formulación del resultado, si bien no define de manera precisa varios elementos como "repetir el experimento sucesivamente" y "para n suficientemente grande", su mayor valor radica en que se habla de la *convergencia de las probabilidades* $P(|X/n - p| > d)$. De esta forma, la convergencia se establece en términos de lo que en la terminología moderna se conoce como *convergencia en medida* y más específicamente como *convergencia en probabilidad*.

Por otro lado, este resultado tiene un profundo contenido estadístico. Decía Jacobo Bernoulli: *"Lo que no se puede encontrar a priori se puede obtener a posteriori, mediante la observación múltiple de resultados de experimentos similares"*. Como ejemplo de la utilidad de su resultado, Bernoulli propone un método para hacer lo que hoy se conoce como *inferencia estadística*, el cual ilustra mediante una urna con un gran número de fichas blancas y negras, mostrando cómo aproximar la razón de blancas a negras, repitiendo en forma sucesiva el experimento de extraer una ficha y regresarla observando el color de la ficha. Cuando se realizan más experimentos se tendrá una aproximación mayor a la razón verdadera. Sin embargo, el resultado de Bernoulli tiene un contenido estadístico más profundo, ya que aproxima por primera vez probabilidades de intervalos, a pesar de que Bernoulli mismo, mediante análisis numéricos, encuentra que su estimación requiere de valores de n muy grandes, aunque su intuición le hacía pensar que debieran ser bastantes menores.

Igualmente importante es destacar que en el método anterior de Bernoulli está la idea básica de simulación de un experimento. El Método de Monte Carlo es hoy en día una herramienta muy importante en diversos campos como finanzas, física, química, biología computacional, geología, e ingeniería, como nos los muestra en su libro George Fishman [11].

En el ámbito de las aplicaciones, Jacobo Bernoulli comenta que su resultado pudiera ser aplicado en problemas de la vida social, civil y económica de su época. En particular, propone su modelo de urnas como un modelo matemático general que pudiera ser aplicado en varios problemas prácticos, en donde la urna y las fichas se sustituyen, por ejemplo, por poblaciones e individuos enfermos, respectivamente (para ver la importancia actual de los modelos de urnas se recomienda el libro de Johnson y Kotz [12]). Fue su sobrino Nicholas quien aplicó de manera exitosa este y otros resultados, tanto en problemas de leyes, como en problemas de esperanza de vida y otros de demografía y seguros.

Gottfried W. Leibniz conoció de los trabajos de Jacobo Bernoulli a través de una serie de cartas entre ellos. Edith Dudley [13] nos explica cómo de estas cartas se puede observar el poco entendimiento entre estos matemáticos, lo que llevó, entre otras cosas, a que Jacobo le explicara -mediante el método de simulación con fichas-la importancia de sus resultados y sus aplicaciones potenciales. Cabe mencionar que durante su vida Leibniz destacó varias veces la importancia de desarrollar la teoría del razonamiento probabilista.

Recientemente, Elart von Collani [14] comenta de manera controversial e interesante la obra de Jacobo Bernoulli.

La Ley de los Grandes Números de Bernoulli fue la base para varios trabajos posteriores. Abraham de Moivre (1667-1754) refina en 1718 el resultado de Bernoulli, y en 1729 presenta el primer caso de Teorema del Límite Central para los experimentos sucesivos de Bernoulli. Este trabajo fue completado, también para experimentos Bernoulli, por Pierre Simon Laplace (1749-1827) en 1812, en lo que se conoce como el Teorema del Límite Integral de de Moivre-Laplace. Cabe destacar en este periodo la publicación del libro *Théorie Analytique de Probabilitiés* de Laplace, que constituye una de las mayores contribuciones en la historia de la teoría de la probabilidad.

Este teorema es importante por varias razones. Aparece la distribución normal también estudiada por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en el contexto de la teoría de errores y el método de mínimos cuadrados. Asimismo, el resultado permite estimar qué tan grande debe ser n en el método de aproximación de Bernoulli, lo cual es la base de la estimación de tamaños de muestra aun en estos días. Por otro lado, este teorema tiene como corolario la Ley de los Grandes Números de Bernoulli, para cualquier valor de p en el intervalo [0,1]. Finalmente, el teorema de de Moivre-Laplace se formula en términos de lo que actualmente se conoce como convergencia de distribuciones o más generalmente, de convergencia débil de medidas de probabilidad, mientras que el resultado de Bernoulli es en el sentido de convergencia en probabilidad.

Otro trabajo importante fue publicado en 1837 por Simeon Poisson (1781-1840), quien formula y prueba la llamada aproximación de Poisson, en donde la probabilidad de éxito p en los experimentos sucesivos de Bernoulli varía en cada experimento de tal forma que se aproxima a cero. Esto da lugar a la llamada ley de eventos raros y la distribución de Poisson. En el ensayo de Begoña Fernández [15] podemos encontrar acerca de este tema y sus aplicaciones, lo cual se presenta en forma amena, motivante y con una estructura interesante. Por otro lado, Poisson da por primera vez una definición de variable aleatoria, la cual es demasiado intuitiva y da el nombre de Ley de los Grandes Números al resultado de Jacobo Bernoulli.

La Ley de los Grandes Números de Bernoulli, el Teorema del Límite Central de de Moivre-Laplace y la Aproximación de Poisson son los teoremas límites más importantes en la historia de la teoría de la probabilidad y cuentan con numerosas generalizaciones -en términos de sumas de variables aleatorias independientes- iniciadas a finales del Siglo XIX por Pafnuty Chebyshev (1821-1894), Andrei Markov (1856-1922) y Aleksandr Lyapunov (1857-1918).

Cabe mencionar que la Ley de los Grandes Números de Bernoulli permite establecer un ejemplo elemental de una contribución de la probabilidad a la matemática. En 1911, Sergei Bernstein (1880-1968) da una prueba simple y constructiva de un teorema de 1885 de Karl Weierstrass (1815-1897): toda función continua en un intervalo compacto puede ser aproximada de manera uniforme por un polinomio. En su demostración, Bernstein usa una desigualdad que Chebyshev había obtenido para probar una generalización del resultado de Bernoulli. Como es bien conocido, esta aproximación es lenta, consistente con la observación que Bernoulli había hecho. Este ejemplo ilustra que en probabilidad es importante ir más allá de obtener una cota siendo necesario encontrar cotas más finas. Esto y otros problemas relacionados con los polinomios de Bernstein nos los explica de manera emotiva e interesante Ana Meda [16].

Como reconocimiento a los trabajos de la familia Bernoulli, en el año de 1975 se fundó la Sociedad Bernoulli para la Probabilidad y la Estadística Matemática [17], cuyo objetivo es promover en el mundo el avance de la probabilidad, los procesos estocásticos, la estadística y sus aplicaciones en todos los aspectos.

Durante los últimos 20 años hemos tenido en México el privilegio de haber organizado tres congresos muy importantes de la Sociedad Bernoulli. En 1990 se celebró en la Ciudad de México el IV Congreso Latinoamericano (CLAPEM) y en el año 2000, en Guanajuato, su V Congreso Mundial, en forma conjunta con la reunión anual del Institute for Mathematical Statistics. Asimismo, en junio de 2011 se celebra en Oaxaca la 35va Conferencia de Procesos Estocásticos y sus Aplicaciones de esta sociedad.

Finalmente, el año 2013 marca el aniversario número 300 de la publicación del Ars Conjectandi de Jacobo Bernoulli. La ciudad de Basilea, Suiza, será la sede de un congreso especial conmemorativo y la Sociedad Bernoulli organiza varias actividades para celebrar este hito en la historia de la teoría matemática de la probabilidad.

3. La Axiomatización de la Teoría de la Probabilidad

Al final del Siglo XIX, la teoría de la probabilidad consistía de métodos sofisticados para contar eventos igualmente probables y en resultados y teoremas importantes sobre sumas de variables aleatorias independientes, que usaban la herramienta de análisis y en especial la integral de Riemann. Sin embargo, no había una definición precisa de probabilidad que permitiera dar un marco general de estudio.

En 1900 se celebró en París el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, en donde David Hilbert (1862-1943) presentó una conferencia describiendo 23 problemas (los llamados *Problemas de Hilbert*) en los que en su opinión debería de poner atención la comunidad matemática en los inicios del Siglo XX. El Problema Seis menciona: "Las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría sugieren el problema de considerar de la misma manera, mediante axiomas, aquellas ciencias físicas en donde la matemática juega un papel importante, en primer lugar la teoría de la probabilidad y la mecánica".

Hilbert describía a la probabilidad como una ciencia física, lo cual es un hecho que hoy en día presentaría muchas controversias. Esta idea de Hilbert refleja tanto el progreso de la mecánica estadística desarrollada por James Maxwell (1831-1879), Ludwig Boltzmann (1844-1906) y Josiah Gibbs (1839-1903), en donde la probabilidad juega un papel importante, así como el estado de la probabilidad en esos tiempos, no aceptada como una rama genuina de las matemáticas, debido, entre otras cosas, a que no se contaba con una definición precisa de probabilidad.

Uno de los primeros intentos por axiomatizar la probabilidad fue el de G. Bohlmann en 1908, quien estudiaba probabilidad motivado por problemas en actuaría -como otros varios matemáticos europeos lo han hecho. De su trabajo hacía ya referencia Hilbert en su Problema Seis. En 1917 Sergei Bernstein propone una axiomatización basada en álgebras de Boole. En 1919, Richard von Mises (1883-1953) propuso otra axiomatización en donde el concepto de probabilidad de un evento aleatorio está relacionado con un experimento ideal y en donde se supone la existencia del límite de una frecuencia. Otros intentos fueron las tesis doctorales de Rudolf Laemmel en Zurich, en 1904 y Ugo Broggi en Göthingen en 1907, siendo este último estudiante de Hilbert.

Henri Poincaré (1854-1912) decía que no era posible dar una definición satisfactoria de probabilidad.

Sin embargo, los fundamentos de la teoría moderna de la probabilidad se basan en el desarrollo de la teoría de conjuntos de George Cantor (1845-1918) y los avances en teoría de la medida e integración de finales del Siglo XIX, en los trabajos de Borel y en las tres primeras décadas del Siglo XX, a partir de Lebesgue en 1902. De especial importancia fueron los trabajos realizados por Johann Radon (1887-1956) y en el contexto de espacios abstractos los hechos por Otton Nikodym (1887-1956), Constantin Charatheodory (1873-1950) y Maurice Fréchet (1878-1973).

En 1909 Borel fue el primero en señalar la relación de la teoría de la medida y la probabilidad y su importancia en la construcción de sus fundamentos. Esta relación estuvo presente en varios de los trabajos de matemáticos en el periodo 1900-1933, entre los que se encuentran los de Paul Lévy (1886-1971), Felix Haussdorff (1686-1942), Antoni Lomnicki (1881-1941), George Polya (1887-1985), Norbert Wiener (1894-1964), Hugo Steinhaus (1887-1972), Alexander Khinchine (1894-1956), Francesco Cantelli (1906-1985), Vladimir Glivenko (1987-1940), Evgeny Slutsky (1880-1948), Stanislaw Ulam (1909-1984), Jacques Hadamard (1865-1963) y Bernstein, entre otros.

En 1933 Andrei Kolmogorov (1903-1987) publica sus *Fundamentos de Probabilidad* [18], en donde la idea original de Borel toma su forma definitiva y se da solución al Problema Seis de Hilbert.

Ezequiel Castro Valenzuela nos da una explicación de los intentos de axiomatización y el desarrollo de la teoría de medida previo a los fundamentos de Kolmogorov [19]. El trabajo de Kolmogorov va más allá de completar la solución al sexto problema de Hilbert (Capítulos 1 y 2) y de cerrar el círculo de ideas existentes en la época acerca de la relación entre probabilidad y medida.

La obra es un modelo de exposición académica y ha sido, para muchos matemáticos, el libro en dónde aprender una introducción a la teoría moderna de la probabilidad. Asimismo, y de acuerdo al mismo Kolmogorov, la elección de los nuevos conceptos y resultados que presenta en los Capítulos 3 al 5 fue motivada por sus investigaciones en problemas concretos en la física.

En el primer capítulo, Kolmogorov presenta los axiomas de la probabilidad elemental (probabilidad aditiva) y prueba que son consistentes pero no completos; da la interpretación de estos axiomas en términos de probabilidad frecuencial, siguiendo las ideas de von Mises. Asimismo, hace una exposición clara de los conceptos de probabilidad que pueden ser estudiados con estos axiomas elementales (independencia de eventos, probabilidad condicional, teorema de Bayes y cadenas de Markov). Este modelo matemático es el adecuado para estudiar fenómenos aleatorios con un número finito de resultados, no necesariamente con la misma probabilidad.

El segundo capítulo agrega el axioma de continuidad de la probabilidad, con lo que se establece el concepto de espacio de probabilidad. Los axiomas siguen siendo consistentes pero no completos. Como ejemplos, introduce los espacios de probabilidad adecuados para estudiar fenómenos aleatorios con un número numerable de resultados, el asociado a cualquier función de distribución, así como generalizaciones a distribuciones multivariadas de donde se obtiene, como caso particular, el modelo para la probabilidad geométrica.

En el Capítulo 3, Kolmogorov presenta el concepto de distribución de probabilidad en espacios de dimensión infinita y su famoso teorema de consistencia. Este resultado fue clave para la teoría de los procesos estocásticos y la construcción de medidas de probabilidad en espacios de funciones, especialmente en C[0,1], el espacio de las funciones continuas en [0,1], y D[0,1], el espacio de las funciones continuas por la derecha y con límite por la izquierda. Cabe destacar que para estudios posteriores de convergencia de medidas de probabilidad en D[0,1], fue necesario considerar topologías distintas a la dada por la métrica del supremo, como las llamadas topologías de Skorohod.

El Capítulo 4 concluye con condiciones para poder derivar e integrar una esperanza matemática con respecto a un parámetro, resultado que fue básico para trabajos futuros en estadística matemática, tales como las cotas de Cramer-Rao para estimadores insesgados y los resultados asintóticos para estimadores de máxima verosimilitud. Son las llamadas condiciones de regularidad.

En el Capítulo 5 se presentan las definiciones modernas de probabilidad condicional y esperanza condicional, usando el teorema de Radon-Nikodym. La esperanza condicional es la base para estudiar las martingalas, una las herramientas más útiles en la teoría moderna de los procesos estocásticos, cuya teoría inició Paul Lévy. El uso de las martingalas comenzó a popularizarse a partir del libro *Stochastic Processes* de Joseph Doob (1910-2004), publicado en 1953.

El Capítulo 6 presenta la demostración de la existencia de una sucesión de variables aleatorias independientes -usando el teorema de consistencia-, así como varios resultados sobre series de variables aleatorias independientes que había obtenido con Khinchine. De especial importancia es la *Ley Fuerte de los Grandes Números*, que completa la línea de trabajo iniciada por Jacobo Bernoulli, lo cual muestra que los axiomas de Kolmogorov recobran la esencia de la probabilidad: *"sólo en un conjunto de probabilidad cero no se cumple que la media empírica de variables aleatorias independientes converge a la media teórica"*.

La obra de Kolmogorov es otro hito que fue fundamental para el desarrollo posterior de la probabilidad y los procesos estocásticos, y para que surgieran más relaciones con otras ramas de las matemáticas. Es lectura obligada para un estudiante que quiera aprender los fundamentos modernos de la teoría de la probabilidad.

4. El Análisis Estocástico

Parte fundamental del desarrollo de la probabilidad en el Siglo XX lo fueron también las aplicaciones y la construcción de modelos estocásticos nuevos surgidos a partir de problemas de otras ciencias, tecnológicos, financieros, industriales, económicos, sociales y de tecnologías de la información; de manera exponencialmente creciente hacia finales del siglo.

En particular, a principios del Siglo XX había la necesidad de contar con un modelo matemático para el *movimiento browniano*, un fenómeno observado en el microscopio por el botánico Robert Brown (1773-1858) en 1828: "Un movimiento caótico de partículas de polen en el agua, causado por el choque con las moléculas vecinas".

La importancia de contar con un modelo matemático para este fenómeno se originaba tanto en el campo de la física como en el de las matemáticas.

El año 2005 fue el Año Internacional de la Física, organizado para conmemorar el primer centenario de la publicación de los trabajos de Albert Einstein (1879-1955) sobre la relatividad especial, el movimiento browniano y el efecto fotoeléctrico.

En un artículo en 1880 sobre mínimos cuadrados [20], el científico danés T. N. Thiele (1838-1910) fue la primera persona en derivar propiedades matemáticas del movimiento browniano, tales como incrementos normales e independientes y varianzas proporcionales al tiempo. Asimismo, deriva una fórmula computacional para objetivos de filtraje y predicción, lo que se conoce ahora como el filtro de Kalman. En su tesis doctoral de 1900, Louis Bachelier (1870-1946), propone el movimiento browniano como modelo para las fluctuaciones de los precios de acciones en la bolsa de valores de París. Su trabajo es la primera investigación matemática sobre el movimiento browniano aplicado a la teoría de valuación de opciones financieras. Asimismo, en su tesis se establece la relación entre el movimiento browniano y la ecuación de calor. Los sinodales de este trabajo fueron Appell, Poincaré y Boussines. Recientemente Mark Davis y Alison Etheridge publicaron una traducción de esta tesis con comentarios y notas históricas [21]. La tesis de licenciatura de Cristina Yuriko Higashida [22] nos ofrece una visión moderna a nivel de licenciatura de los diferentes enfoques de Bachelier para obtener el movimiento browniano y comparar con datos vigentes de mercados de "calls europeos", la fórmula moderna de Black-Sholes-Merton con la de Bachelier.

En 1908 Paul Langevin (1872-1946) publicó su trabajo sobre el movimiento browniano, que sin ser riguroso, es importante por haber considerado por primera vez una ecuación diferencial estocástica.

Un estudio riguroso del movimiento browniano fue iniciado en la década de 1920 por Wiener, quien construye una medida de probabilidad en el espacio de la funciones continuas en $(0, 1]$ y da un modelo matemático preciso para el movimiento browniano. Su trabajo usa resultados del análisis funcional, como la integral de Percy Daniell (construida con elementos del análisis funcional) en lugar de la integral de Lebesgue. En su tesis de licenciatura Germán González Millán [23] nos presenta cuatro construcciones matemáticas distintas del movimiento browniano.

Lévy también estudia de manera importante el movimiento browniano, así como varias extensiones, obteniendo una nueva clase de procesos conocidos actualmente como Procesos de Lévy, y cuya teoría y aplicaciones han sido objeto de estudio extensivo desde la segunda mitad del Siglo XX. Los procesos de Lévy, como el movimiento browniano, tienen incrementos independientes y estacionarios, siendo el browniano el único que tiene trayectorias continuas, por lo que en el estudio de los procesos de Lévy los saltos de los mismos juegan un papel importante. Asimismo, han surgido conexiones importantes entre ecuaciones integro-diferenciales y probabilidad.

En 1940, el probabilista japonés Kiyoshi Itô (1915-2008), inventó de manera completamente rigurosa la integral estocástica con respecto al movimiento browniano y su correspondiente fórmula de cambio de variable (llamada actualmente fórmula de Itô). Estudió con rigor las correspondientes ecuaciones diferencias estocásticas, lo que permite tener modelos que consideran en forma conjunta tanto aspectos aleatorios como determinísticos. La motivación de Itô fue completamente teórica motivada por el estudio de trayectorias de procesos de Markov, que habían sido estudiadas con métodos analíticos (semigrupos de operadores, generadores infinitesimales, ecuación de Fokker-Plank, etc.), entre otros, por Kolmogorov.

Si bien el trabajo de Itô es de naturaleza profundamente teórica, su formulación abstracta, nítida y profundamente académica permite su aplicación en diversas áreas de la física (turbulencia, teoría del campo, relatividad), ingeniería (filtros, teoría de control, estabilidad, comunicaciones, movimientos por sismos), biología (dinámica de poblaciones) y economía (finanzas). Asimismo, el análisis estocástico es importante en varias áreas de las matemáticas como ecuaciones diferenciales parciales, teoría del potencial, análisis armónico, geometría diferencial, entre otros.

Para una introducción al movimiento browniano se puede consultar la monografía de Diego Bricio Hernández [24]. Aplicaciones del cálculo estocástico al estudio del movimiento browniano es el tema del libro de Julio César García Corte y Juan Ruiz de Chávez [25]. Una amplia información acerca de cálculo estocástico se puede encontrar en el libro de Constantin Tudor [26]. La tesis de Ulises Márquez Urbina [27] versa sobre modelos de cálculo estocástico para el movimiento browniano relativista.

Los trabajos de Itô han sido estudiados con mayor generalidad al considerar integrales estocásticas con respecto a otros procesos, como los de Lévy -cosa que Itô mismo hizo-, las martingalas y, más generalmente, las semimartingalas. Estas últimas son los procesos estocásticos más generales con respecto a los cuales se pueden integrar procesos estocásticos en el sentido de Itô. En esto han sido fundamentales las contribuciones de la escuela francesa de Probabilidad. El libro de Tomasz Bojdecki

[28] es una referencia para este tema, mientras que la monografía de Alfonso Rocha Arteaga y Ken-iti Sato [29] contiene información reciente sobre leyes infinitamente divisibles y procesos de Lévy.

Lo anterior ha permitido contar con una amplia gama de modelos alternativos que no recogen necesariamente todas las propiedades del movimiento browniano, pero que tienen igualmente una estructura probabilística rica. Esto ha hecho que las aplicaciones en finanzas se hayan potenciado con estos procesos, estando siempre presentes y de manera *natural* las martingalas.

En 1997, Robert Merton y Myron Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía por el uso del análisis estocástico en finanzas, concretamente la fórmula de Black-Scholes, que se describe mediante una ecuación diferencial estocástica.

Varios aspectos en finanzas encuentran una contraparte en la teoría de abstracta de martingalas, siendo éste otro ejemplo de una rama de las matemáticas que se desarrolla de manera muy general, y luego se convierte en una herramienta esencial para las aplicaciones. Tal como los trabajos de Evariste Galois (1811-1832) que encontraron muchos años después aplicaciones en diseños de experimentos estadísticos y la criptografía, entre otras aplicaciones modernas.

En la última década se han creado posgrados de matemáticas en finanzas en varios universidades de prestigio en el mundo, a través de la colaboración de varios departamentos como los de finanzas, economía y matemáticas. En muchos de estos programas un curso de Cálculo Estocástico es obligatorio. El libro de Tomash Mikosch [30] contiene material elemental para aprender el cálculo de Itô y las finanzas estocásticas mientras que el libro de Michael Steele [31] nos da una perspectiva avanzada al mismo tiempo que nos muestra cómo las martingalas son el lenguaje natural de las finanzas modernas. Cabe destacar que este libro se usa en la Wharton School de la Universidad de Pennsylvania y está dirigido a estudiantes que deseen adquirir habilidades de cálculo estocástico y sus aplicaciones a problemas en finanzas y que tienen experiencia con probabilidad y estadística, pero no con cursos avanzados de procesos estocásticos.

Nuestro país no ha sido la excepción en matemáticos que se han dedicado al cálculo estocástico en finanzas y hayan dirigido tesis en este tema, principalmente en la UNAM, la UAM, el Cinvestav, el ITAM y el CIMAT.

Un ejemplo de conexión entre ecuaciones en derivadas parciales y problemas de matemáticas financieras y cálculo estocástico, nos lo explica Patricia Saavedra [32], discutiendo también aproximaciones numéricas del problema, las cuales son de fundamental importancia para la implementación de las soluciones.

El estudio del Cálculo Estocástico inventado por Itô en 1943 y su desarrollo y aplicaciones hacia finales del Siglo XX, representan otro hito importante en la historia de la probabilidad y los procesos estocásticos.

5. Reconocimientos Recientes a Probabilistas

Debido al desarrollo vertiginoso de las teorías de la probabilidad y los procesos estocásticos, y a sus numerosas y múltiples aplicaciones, en varios círculos científicos se afirma que el Siglo XXI será conocido como el *Siglo Estocástico*.

En los últimos años varios probabilistas han recibido reconocimientos importantes en el ámbito de la matemática. En el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Madrid en el 2006, dos de las cuatro galardonados con *Medallas Fields* fueron -por primera vez- probabilistas y el ganador de la primera edición del *Premio Gauss por Aplicaciones en Matemáticas* fue Kiyoshi Itô. Asimismo, en 2007 el Ganador del Premio Abel fue también un probabilista, el profesor S. S. R. Varadhan

La *Medalla Field*s es el máximo reconocimiento internacional en el mundo de las matemáticas y es otorgado por la Unión Matemática Internacional (IMU) a matemáticos menores de 40 años, usualmente como reconocimiento a una obra completa, más que a un logro particular. En el año 2006 los premiados fueron:

1) Andrei Okunkov, de la Universidad de Princeton, nacido en la ex Unión Soviética en 1969, con doctorado por la Universidad Estatal de Moscú en 1995, *“Por sus contribuciones a la relación entre probabilidad, teoría de representaciones y geometría algebraica”*. Su trabajo ha ayudado a establecer relaciones entre diferentes áreas de las matemáticas y ha aportado elementos novedosos para comprender problemas que ocurren en la física, especialmente en mecánica estadística.
2) Grigory Perelman, nacido en la ex Unión Soviética en 1966, con doctorado por la Universidad Estatal de San Petersburgo, *“Por sus contribuciones a la geometría y sus ideas revolucionarias sobre la estructura geométrica y analítica del flujo de Ricci”*. Sus resultados permiten resolver, entre otras, la famosa conjetura de Poincaré en topología.
3) Terence Tao, de la Universidad de California en Los Angeles, nacido en Australia en 1975 y con doctorado por la Universidad de Princeton en 1996, *“Por sus contribuciones a las ecuaciones diferenciales parciales, combinatoria, análisis armónico y teoría aditiva de números”*. Su trabajo ha tenido impacto en áreas como números primos y en problemas que se originan en la teoría general de la relatividad y ecuaciones nolineales de Schroedinger. [Cabe mencionar que Terrance ha incursionado en el estudio de matrices aleatorias, uno de los temas de actualidad de la probabilidad, con relaciones importantes con la teoría de números, la física y la comunicación inalámbrica].
4) Wendelin Werner, de la Universidad de Paris-Sud en Orsay, nacido en 1968 en Alemania, con doctorado en la Universidad París VI en 1993, *“Por sus contribuciones al desarrollo de la evolución estocástica de Loewner, la geometría del movimiento browniano en dos dimensiones y la teoría del campo conforme”*.

> Su trabajo representa una de las más importantes y fructíferas interacciones entre las matemáticas y la física en tiempos recientes. Sus ideas combinan teoría de probabilidad y análisis complejo clásico y tienen el potencial de establecer conexiones con una amplia variedad de aplicaciones.

Por otro lado, el *Premio Gauss por Aplicaciones de Matemáticas*, es un reconocimiento creado recientemente por la Unión Matemática Alemana y la IMU. Su objetivo es promover el hecho de que la matemática no es sólo pura, sino con impacto importante y profundo en casi todas las ciencias y en la tecnología, en los negocios y la vida diaria.

El primer ganador del Premio Gauss fue Kiyoshi Itô, como reconocimiento a que el análisis estocástico que él fundó es actualmente una rica, importante y exitosa rama de las matemáticas, con un impacto formidable en "la tecnología, los negocios y la vida diaria de la gente".

Los trabajos de Itô fueron fundamentalmente teóricos y pioneros, contribuyendo de manera notable para hacer de la probabilidad una rama muy respetable de las matemáticas, con una dinámica actual muy especial. En el año 2003, la revista Stochastic Processes and their Applications, de la Sociedad Bernoulli, creó el Premio Itô el cual se otorga de forma bianual al mejor artículo en esa revista [33].

El *Premio Abel* (el cual algunos consideran el Premio Nobel en Matemáticas) es un premio internacional que otorga la Academia de Ciencias y Letras de Noruega, como reconocimiento a contribuciones científicas sobresalientes y profundas en el campo de las matemáticas. En el año 2007, este premio lo obtuvo el matemático S.S.R. Varadhan, profesor del Instituto Courant de Nueva York, por sus contribuciones fundamentales a la probabilidad y en particular por crear una teoría unificada para el problema de grandes desviaciones.

El profesor Varadhan ha visitado México al menos tres veces. En 1990 dio la Conferencia Inaugural del Congreso Latinoamericano de la Sociedad Bernoulli en la Ciudad de México y en el año 2000 también dio la Conferencia Inaugural del Congreso Mundial Conjunto de la Sociedad Bernoulli y el Instituto de Estadística Matemática, en la ciudad de Guanajuato. Asimismo, en el año 2004 impartió una de las Conferencias Magistrales dentro del Segundo Congreso Latinoamericano de Matemáticas organizado por la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) en Cancún.

Entre otros libros y monografías que ha escrito el profesor Varadhan, está el de Procesos de Difusión Multidimensionales (con D. Stroock como coautor), en donde no pocos probabilistas hemos aprendido sobre el famoso "problema de la martingala", el cálculo estocástico y la relación con ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Igualmente importante son sus notas clásicas de Introducción a los Procesos Estocásticos publicados por el Instituto Courant, en donde se expone de manera clara, entre otros resultados, la demostración del teorema de consistencia de Kolmogorov y la existencia de procesos estocásticos.

También en el año 2007, Henry P. McKean, profesor del Instituto Courant de Nueva York, obtuvo el premio Leroy P. Steele Prize por los logros obtenidos durante su vida académica, premio otorgado por la Sociedad Matemática Americana. Este premio se le otorgó por su rica y magnífica carrera matemática y por sus trabajos en análisis con orientación a teoría de probabilidad. McKean es conocido por su larga colaboración con Kiyosi Itô.

Otras áreas de trabajo de McKean incluyen matemáticas financieras, física-matemática y el desarrollo de la teoría del índice.

Finalmente, México tiene actualmente una masa crítica importante y de prestigio de investigadores en probabilidad, la cual incluye a jóvenes muy dinámicos y colegas que han jugado un papel pionero importante para el desarrollo de investigadores en esta disciplina en los últimos 40 años. Reconocimientos a probabilistas en México incluyen el Premio Nacional de Ciencias a Onésimo Hernández Lerma, y los Premios de la Academia Mexicana de Ciencias a la mejor Tesis Doctoral a Rolando Cavazos Cadena y Gerónimo Uribe Bravo.

Por la Escuela de Física y Matemáticas del I.P.N. han pasado varios destacados investigadores en probabilidad. Como ejemplos están como profesores Alberto Ruíz Moncayo, Daniel Hernández y Luis Gorostiza y/o como egresados Onésimo Hernández Lerma y Jorge Alberto León Vázquez.

6. Probabilidad en Licenciaturas de Matemáticas

En algunas comunidades matemáticas, en particular en México, suele existir todavía un menosprecio de la probabilidad, debido a sus orígenes en los juegos de azar y a su lenta evolución hacia una teoría matemática formal. Algunos profesores de poca cultura matemática piensan que la probabilidad es un tema menor que solamente tiene que ver con juegos de monedas, dados y barajas, y desafortunadamente les trasmiten esa idea equivocada a sus estudiantes. No saben que en los lanzamientos sucesivos de una moneda ya se encuentran en germen algunos de los teoremas límites más profundos de las matemáticas, como la ley de los grandes números y el teorema del límite central, entre otros. Al respecto se sugiere el libro *Pile ou Face* de Emmanuel Lesigne [34], cuya traducción al inglés fue hecha recientemente por Anna Pierrehumbert.

Sin duda, es necesaria también una autocrítica y cuestionarnos sobre el papel que en esto hemos jugado los probabilistas, especialmente en lo referente a la enseñanza de nuestra disciplina. Por razones históricas, la probabilidad ha sido relegada a uno o dos cursos dentro de un plan de estudios de matemáticas, de lo cual no es excepción las carreras de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N., y otras similares en México.

Debido a que el estudio de la teoría moderna de la probabilidad requiere de otras ramas de la matemática, un estudiante interesado en la probabilidad debe privilegiar una formación matemática amplia e integral a nivel de licenciatura, acompañada de algunos cursos de probabilidad, y postergar una especialización para el posgrado.

Como dice Leo Breiman en el prefacio de su libro [35], *la probabilidad tiene una mano derecha y otra mano izquierda: en la derecha está el trabajo riguroso de sus fundamentos usando material de teoría de la medida, mientras la mano izquierda piensa de “manera probabilística” reduciéndose a problemas de juegos de azar, lanzamientos de moneda o movimientos de partículas*. Así, mientras que la derecha maneja el rigor, la segunda es responsable del sabor de la probabilidad, siendo ambas necesarias para el razonamiento estocástico y sus aplicaciones.

Dentro de una carrera de matemáticas, la parte izquierda madura empezando con cursos de probabilidad donde el rigor está en el espacio de probabilidad elemental, estudiando conceptos como el de independencia, probabilidad condicional, teorema de Bayes, etc. -como lo hace Kolmogorov en el Capítulo I de su libro. En esta etapa, la probabilidad se debe aprender también de manera informal e intuitiva; los juegos de azar son una fuente de motivación natural, aunque no la única. Con ellos se pueden ilustrar varios conceptos, de tal forma que se aprecia cómo trabaja y se aplica la probabilidad. Hay que adquirir la habilidad de responder a preguntas sobre fenómenos aleatorios que surgen en problemas reales. Con la probabilidad se pueden estudiar problemas divertidos, interesantes y muchas veces difíciles, con conocimientos matemáticos mínimos. El libro de Stirzaker [36] es un ejemplo recomendable en este sentido. Deben estudiarse paradojas, ensayos Bernoulli, cadenas de Markov, procesos de Poisson y distribuciones. Asimismo, es importante en estos días usar a la simulación como una herramienta para apoyar la comprensión de la construcción de los modelos y como herramienta para analizar propiedades y validar los modelos vistos, así como algunas de sus extensiones.

En un segundo curso se deben ver herramientas analíticas, como funciones generadoras y características, así como los teoremas límites clásicos y más procesos estocásticos con espacio de estados discreto y sus principales herramientas analíticas de estudio. Una referencia para el tema de cadenas de Markov es la monografía de Caballero et al. [37] Importante también son la Introducción y el Capítulo 1 del libro de Boris Gnedenko [38]. Los cuales consideran aspectos históricos y filosóficos de la probabilidad. El primer volumen del libro de Miguel Ángel García Álvarez (mencionado en la introducción de este escrito) es una excelente y recomendada referencia para un primer curso de probabilidad.

Por otro lado, para lograr la habilidad de la mano derecha, es fundamental tomar un curso de medida e integración en espacios abstractos [39], después de varios cursos de análisis matemático, a lo que debe seguir un curso de probabilidad teórica y otro de procesos estocásticos avanzados. La teoría de la medida en espacios abstractos es usualmente un tema que resulta árido para los estudiantes. Sin embargo, cuando se aplica en probabilidad, resulta en algo que no sólo es más divertido y dinámico, sino que se ve fuertemente enriquecida. Si bien la teoría de la medida se fundamenta en las reglas de sumas, la probabilidad la enriquece con reglas de multiplicación que describen los conceptos de independencia y condicionamiento. Más aun, en los procesos estocásticos es fundamental considerar familias de sigma-álgebras, contrario a la teoría de la medida en donde se fija una sola. Además, en varias aplicaciones es necesario cambiar de espacio de probabilidad, siendo el teorema de Radon-Nikodym la conexión entre el mundo real y las martingalas.

En el ámbito de la cultura general y necesaria de un probabilista, insisto en que hay que privilegiar a nivel de licenciatura una formación integral y amplia, y dejar para el posgrado la especialización. A nivel de licenciatura (después de cursos básicos de cálculo diferencial e integral de una y varias variables, álgebra superior, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales ordinarias y matemáticas discretas) es recomendable tomar cursos de ecuaciones diferenciales parciales, variable compleja, álgebra moderna, análisis real, teoría de conjuntos, topología, teoría de números, análisis funcional, análisis numérico, teoría de gráficas, investigación de operaciones, simulación, sistemas dinámicos, funciones especiales y transformadas especiales, modelación matemática, optimización, etc. Cursos de cómputo científico y simulación son un complemento indispensable. Igualmente importante es una base de estadística y cursos relevantes en otras disciplinas, así como afrontar y resolver problemas concretos que surjan en la práctica, y desarrollar habilidades de comunicación e interacción con colegas de otras profesiones.

Durante su formación el estudiante debe procurar asistir a algunos de los numerosos eventos de probabilidad y procesos estocásticos que se realizan en México desde hace varios años. La comunidad de probabilidad y procesos estocásticos del país tiene ya una tradición en la organización de talleres y conferencias temáticas especializadas, los congresos ya mencionados de la Sociedad Bernoulli, varias escuelas orientadas a estudiantes y los Simposios Bianuales de Probabilidad y Procesos Estocásticos. Varios de estos eventos tienen memorias publicadas por la Sociedad Matemática Mexicana, la Sociedad Americana de Matemáticas o editoriales de prestigio de circulación internacional.

Dos ejemplos sobre relaciones entre probabilidad y otras ramas de las matemáticas son las tesis de licenciatura de Octavio Arizmendi Echegaray [40] y Carlos Vargas Obieta [41], las cuales son una conjunción de probabilidad y diversos temas de análisis funcional, teoría de la medida, variable compleja, combinatoria de particiones que no se cruzan y representaciones de grupos. Ellas se enmarcan dentro de la llamada probabilidad no conmutativa, tema motivo de otro ensayo en los 70 años de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Decía Laplace sobre la probabilidad, que es sorprendente que una ciencia que se inició con las consideraciones del juego, se hubiese elevado a los objetos más importantes del conocimiento humano [42]. En la primera década del Siglo XXI y a los 50 años de creación de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N. esto sigue siendo válido.

Sin duda es todo un reto el que plantea el estudio de esta rama fundamental, trascendente, dinámica y actual de las matemáticas.

Guanajuato, Gto., a febrero del 2011

REFERENCIAS

[1] Alberto Ruiz Moncayo, "Introducción a la Probabilidad", *Fondo de Cultura Económica*, (1980).

[2] Luis G. Gorostiza, *La Probabilidad en el Siglo XX*, Miscelánea Mat., Soc. Mat. Mexicana **33** (2001), 69–92.

[3] Miguel Angel García Alvarez, "Introducción a la Teoría de la Probabilidad (Primer y Segundo Curso)", *Fondo de Cultura Económica*, (2005).

[4] Deborah J. Bennett, "Randomness", *Harvard University Press*, (1998).

[5] Mark Kac y otros, "Probability and Related Topics in Physical Sciences", Lectures in Applied Mathematics. *Amer. Math. Soc.*, (1957).

[6] Guillermo Basúlto Elías, "Sobre los Números de Borel y algunas Extensiones", Tesis de Licenciatura en Matemáticas, *Universidad de Guanajuato*, (2009).

[7] María Emilia Caballero, *Martingala de Pascal*, Miscelánea Mat., Soc. Mat. Mexicana **43** (2006), 1–19.

[8] David Salsburg, "The Lady Tasting Tea", *Henry Holt and Company*, Cap. 26 (2001).

[9] María Emilia Caballero, *Aportaciones de Fermat a la Teoría de la Probabilidad,* Miscelánea Mat., Soc. Mat. Mexicana **34** (2001), 85–102.

[10] Jacob Bernoulli, "The Art of Conjecturing", Traducción al inglés con introducción y notas de Edith Dudley Sylla, *Johns Hopkins University Press*, (2006).

[11] George Fishman, "Monte Carlo", *Springer*, (2003).

[12] Norman Johnson y Samuel Kotz, "Urn Models and Their Applications", *Wiley*, New York, (1977).

[13] Edith Dudley, *The Emergence of Mathematical Probability from the Perspective of Leibniz-Jacob Bernoulli Correspondence*, Perspectives on Science 6, 44–76.

[14] Elart von Collani, *Jacob Bernoulli Deciphered*, Bernoulli News, **13** (2), 2006.

[15] Begoña Fernández, "La Ley de los Eventos Raros, Legado de Siméon Denis Poisson", *Memorias Escuela Regional de Probabilidad y Estadística*, Villahermosa, UJAT, (2008).

[16] Ana Meda, *Interpolar con volados, o los Polinomios de Bernstein*, Miscelánea Mat., Soc. Mat. Mexicana **41** (2005), 11–22.

[17] Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability http://www.bernoulli-society.org/

[18] Andrei Kolmogorov, “Foundations of Probability”, Traducción al inglés de N. Morrison. *Chelsea*, New York, (1950).

[19] Ezequiel Castro Valenzuela, *Axiomatización de la Probabilidad*, Proyecto de Verano de la Academia Mexicana de Ciencias 2009, http://www.cimat.mx:88/ pabreu/ezequielcastro.pdf

[20] T. N. Thiele, *Sur la Compensation de quelques Erreurs quasi-systématiques par la Méthode des moindres Carrés*, Reitzel, Copenhague, 1880 (versión en francés).

[21] Mark Davis y Alison Etheridge, “Louis Bachelier ´s Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance”, *Princeton University Press*, (2006).

[22] Cristina Yuriko Higashida Guerrero, “Estudio Sobre la Teoría de la Especulación de Luis Bachelier Cien Años Después”, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, *ITAM*, (Asesor José Luis Farah).

[23] Germán González Millán, “Construcción del Movimiento browniano Unidimensional”, Tesis de Licenciatura en Física y Matemáticas, *Universidad Autónoma de Sinaloa*, (Asesor Alfonso Rocha Arteaga).

[24] Diego Bricio Hernández Castaño, “Caminatas Aleatorias y Movimiento browniano”, Monogr. Inst. Mat. *Universidad Nacional Autónoma de México* **9**, (1981).

[25] Julio César García Corte y Juan Ruiz de Chávez, “Tiempos Locales y Excursiones del Movimiento browniano”, *Universidad Autónoma Metropolitana*, (2002).

[26] Constantin Tudor, “Procesos Estocásticos”, Aportaciones Mat. Textos Nivel Avanzado **2**, *Soc. Mat. Mexicana*, tercera edición (2002).

[27] Ulises Márquez Urbina, “Modelos de Cálculo Estocástico para el Movimiento browniano Relativista”, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, *Universidad de Guanajuato*.

[28] Tomasz Bojdecki, *Teoría General de Procesos e Integración Estocástica*, Aportaciones Mat. Textos Nivel Avanzado **6**, *Soc. Mat. Mexicana*, (1995).

[29] Alfonso Rocha-Arteaga y Ken-iti Sato, *Topics in Infinitely Divisible Distributions and Lévy Processes*, Aportaciones Mat. Investig. **17** Soc. Mat. Mexicana (2003).

[30] Tomash Mikosch, “Elementary Stochastic Calculus with Finance in View”, *World Scientific Publishing*, (1999).

[31] Michael Steel, “Stocahstic Calculus and Financial Applications”, *Springer Verlag*, (2001).

[32] Patricia Saavedra, *Valuación de una Opción Americana como un Problema de Frontera Móvil*, Aportaciones Mat. Comun. **32** Soc. Mat. Mexicana (2003), 183–202.

[33] Phillip Protter, *A New Prize in Honor of Kyosi Itô*, Editorial Stochastic Processes and Their Applications, Elsevier **108** (2003), 151–153.

[34] Emmanuel Lesigne, *Heads o Tails, An Introduction to Limit Theorems in Probability*, (Traducción de Anna Pierrehumbert), Student Mathematical Library Vol. **28**, Amer. Math. Soc. (2005).

[35] Leo Breiman, “Probability”, *Addison-Wesley Publishing Company*, (1968).

[36] David Stirzaker, “Elementary Probability”, *Cambridge University Press*, Segunda Edición, (2003).

[37] Ma. Emilia Caballero, Víctor M. Rivero Mercado, Guillermo Uribe Bravo y Carlos Velarde, *Cadenas de Markov; Un Enfoque Elemental*, Aportaciones Mat. Textos Nivel Medio **29**, Soc. Mat. Mexicana. 2004

[38] Boris Gnedenko, "Theory of Probability ", *Chelsea*.

[39] Paul R. Halmos, "Measure Theory", *Springer Verlag*, Graduate Texts in Mathematics, (1974).

[40] Octavio Arizmendi Echegaray, "Divisibilidad Infinite Libre de Medidas de Probabilidad", Tesis de Licenciatura en Matemáticas, *Universidad de Guanajuato*, (2008).

[41] Carlos Vargas Obieta, "Representaciones de Grupos Simétricos y Probabilidad Libre", Tesis de Licenciatura en Matemáticas, *Universidad de Guanajuato*, (2009).

[42] Edward Kasner y James Newman, "Las matemáticas y la Imaginación", Traducción al español de Miguel Lara Aparicio y Luís Gorostiza. *Inst. Mat. -UNAM y Soc. Mat. Mexicana*, (2006).

DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA, CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A. C.

E-mail address: pabreu@cimat.mx