

**Aplicaciones de la  
Teoría de Matrices Aleatorias  
en la Comunicación Inalámbrica**  
XIX Verano de la Investigación Científica

**Mario Alberto Diaz Torres**  
Universidad de Guadalajara  
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías  
Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica  
mariodiaztorres@gmail.com

13 de agosto de 2009

Palabras clave: Teorema de Marchenko-Pastur, Distribución Wishart, SS-CDMA,  
Sistema Multiantena, Capacidad Asintótica, Filtro Adaptado.

---

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Detección Multiusuario.</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Señales Inalámbricas . . . . .	7
1.3. Decodificadores . . . . .	8
1.4. Espectro Ensanchado por Secuencia Directa . . . . .	8
1.5. Filtro Adaptado . . . . .	9
1.6. Probabilidad de Error . . . . .	10
1.7. Comportamiento Multiusuario con Firmas no Ortogonales . . . . .	10
1.8. El Detector Lineal MMSE . . . . .	11
1.9. El Teorema de Marchenko-Pastur . . . . .	12
1.10. MMSE Promedio . . . . .	12
1.11. Calculo del SIR . . . . .	13
<b>2. Sistemas Multiantena</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.2. Modulación . . . . .	15
2.3. Modelo del Canal . . . . .	16
2.4. Capacidad del Canal . . . . .	17
2.5. El Teorema de Marchenko-Pastur . . . . .	19
<b>Conclusiones</b>	<b>21</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>23</b>

---

# Introducción

El presente trabajo fue desarrollado durante el XIX Verano de la Investigación Científica edición 2009 bajo la dirección del Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión. Este trabajo tiene como objetivo mostrar una vinculación entre la teoría de las matrices aleatorias y la comunicación inalámbrica. El teorema central sobre el cual gira este trabajo es el Teorema de Marchenko-Pastur, un resultado primordial en la Teoría de Matrices Aleatorias, el cual es usado para calcular diversas medidas de desempeño de sistemas inalámbricos.

Principalmente se estudian dos sistemas. El primero de estos sistemas es el Espectro Ensanchado por Secuencia Directa. Se describe a detalle este sistema y mostramos como la aplicación del Teorema de Marchenko-Pastur es natural.

El segundo sistema es un sistema monousuario con múltiples antenas de transmisión y múltiples antenas de recepción. Se usa sin demostrar el Teorema 2.1 el cual nos da una fórmula para la capacidad de un canal Gaussiano con atenuación de Rayleigh. Omitimos la prueba de este teorema dado que involucra elementos de teoría de la información que se escapan del propósito de este resumen. A partir de dicha fórmula se derivan expresiones útiles para el cálculo de la capacidad asintótica del canal, la cual se calculará mediante el Teorema de Marchenko-Pastur.

Si bien para entender el material aquí expuesto no es necesario que el lector conozca detalladamente que es la capacidad de un canal o ciertos elementos propios de la teoría de información, sí recomendamos al lector entusiasmado leer primero a manera de lectura informativa el artículo de Shannon [4]. No es necesario leer todo el artículo, basta con leer lo referente a sistemas discretos para formarse una buena intuición de lo que está sucediendo.

**Mario Alberto Díaz Torres**

---

# Capítulo 1

## Detección Multiusuario.

### 1.1. Introducción

Este capítulo presenta desde un punto de vista intuitivo la mayoría de las ideas necesarias para modelar el sistema de comunicaciones en cuestión. Asumimos que el lector no es un experto en sistemas de comunicaciones, por lo cual describiremos con tanto detalle como sea posible algunos elementos relativos a las comunicaciones inalámbricas. Los cálculos se harán con relativo detalle, sobre todo aquellos que jueguen un papel fundamental en la aplicación de la teoría de matrices aleatorias.

### 1.2. Señales Inalámbricas

Podemos pensar en una señal inalámbrica como una función  $g(x, y, z, t) \in \mathbb{R}$  que viaja por el espacio a través del tiempo, y que de alguna manera puede ser vista por alguien (un receptor), dicho alguien estará en una posición fija del espacio en lo que resta de este resumen, lo cual nos permite eliminar los parámetros  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la función  $g$ , dejando a  $g$  simplemente en función del tiempo  $t$ . Cuando más de una señal inalámbrica viaja en el espacio un receptor puede ver a todas las señales, sin embargo, no las verá de manera separada, sino de una manera conjunta. O sea, si  $\{g_i(t)\}_{i=1}^n$  son las señales que viajan por el espacio, entonces el receptor observará la siguiente señal o función

$$y(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) + \sigma n(t),$$

donde  $n(t)$  es el ruido introducido por el canal o medio de transmisión. Para esta exposición consideraremos que el ruido  $n(t)$  es Gaussiano de media cero y varianza uno para cada tiempo  $t$ , además  $E[n(t)n(s)] = \delta(t - s) \forall t, s \in \mathbb{R}$ .

---

### 1.3. Decodificadores

Una vez que la función  $y(t)$  es vista en el receptor, entonces se procede a *separar* la información procedente de las diversas fuentes. Sin embargo, esto no es trivial, ya que imaginemos la situación hipotética en la cual  $g_1(t) = sen(t)$  y  $g_2(t) = -sen(t)$ , si solo estas dos funciones o usuarios estuvieran transmitiendo, entonces el receptor observaría solamente  $y(t) = \sigma n(t)$ , lo cual claramente no nos producirá ninguna información útil. Por esto, en ciertos sistemas de comunicaciones inalámbricas digitales se opta por convención usar las siguientes formas de usuarios

$$g_k(t) = A_k b_k s_k(t).$$

Físicamente,  $A_k$  es la amplitud de la señal recibida la cual esta relacionada directamente con la potencia de la señal transmitida,  $b_k$  es el bit transmitido en una comunicación digital con  $b_k = \{-1, +1\}$  y  $s_k(t)$  es una forma de onda con energía unitaria seleccionada de tal forma que en la medida de lo posible evite situaciones como la descrita arriba. Todas las  $s_k(t)$  tienen la misma duración y asumimos que los sistemas son sincrónicos, es decir, todos los elementos del sistema tienen un *reloj* común que les permite saber cuando empieza y cuando termina cada periodo en la comunicación.

En los sistemas de comunicaciones tanto el transmisor como el receptor conocen la forma de onda con la cual se está transmitiendo la información, bajo esta condición la mayoría de los receptores *separan* la información  $y_k$  de cada usuario en el sistema multiusuario de la siguiente manera

$$y_k = \langle y(t), s_k(t) \rangle = \int_0^\tau y(t) s_k(t) dt.$$

Idealmente nos gustaría que  $\langle s_i, s_j \rangle = \rho_{ij} = 0$  con  $i \neq j$ , es decir que las formas de onda no se interfirieran unas con otras al momento de extraer su información. Si bien es posible crear conjuntos de formas de onda ortogonales esto regularmente resulta poco conveniente comercialmente hablando dado que el número de firmas ortogonales en un ancho de banda dado suelen ser muy pocas y por lo tanto solo se podrían atender a unos pocos usuarios a la vez, por lo cual debemos buscar otras alternativas.

### 1.4. Espectro Ensanchado por Secuencia Directa

Como una alternativa al problema expuesto en la sección anterior, se ha creado el sistema de comunicaciones llamado Espectro Ensanchado por Secuencia Directa. No se darán muchos detalles técnicos en el sentido de implementación física pero haremos una descripción matemática a dicho sistema. Este sistema se basa en crear firmas de la forma

$$s_k(t) = \sum_{i=1}^N d_{ki} \varphi_i(t),$$



---

donde  $d_{ki} \in \{-\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}\}$  con probabilidad un medio para cada valor, y las  $\{\varphi_i(t)\}_{1 \leq i \leq N}$  son *pequeñas firmas* ortogonales las cuales llamaremos chips. Por lo regular la ortogonalidad es alcanzada mediante una división del tiempo para cada chip. Un ejemplo de tales firmas está en la siguiente gráfica.

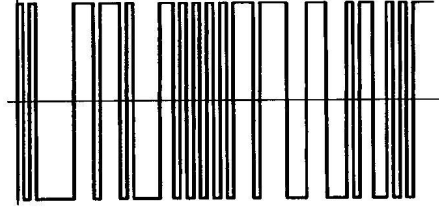


Figura 1.1: Ejemplo de firma formada por chips rectangulares.

Dado que las funciones  $\{\varphi_i(t)\}_{1 \leq i \leq N}$  son fijas para todas las firmas, entonces una firma  $s_k$  queda completamente determinada por el vector  $\mathbf{s}_k = [d_{k1}, \dots, d_{kN}]^T$ .

Consideremos la matriz  $\mathbf{S} = (d_{kn}) = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_K)^T$  de  $K \times N$  donde  $K$  es el número de usuarios del sistema y  $N$  el número de chips por firma, es claro por la forma de tomar las  $\mathbf{s}_i$  que  $\mathbf{S}$  es una matriz cuyas entradas tienen media cero, varianza  $\frac{1}{N}$  y momento cuarto igual a  $\frac{1}{N^2}$ . Definamos ahora la matriz de covarianza como

$$\mathbf{R} = \{\rho_{ij}\} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T. \quad (1.1)$$

Esta matriz de covarianza juega un papel fundamental en el análisis del sistema, como veremos mas adelante.

## 1.5. Filtro Adaptado

El Filtro Adaptado es un receptor que entre otras cosas funciona en paralelo, es decir procesa a todos los usuarios simultáneamente lo cual lo hace un receptor muy práctico y ampliamente utilizado. Como todos los receptores, el filtro adaptado tiene como función estimar de la mejor manera los bits que se transmitieron. En este caso particular se le asigna a cada usuario la salida dada por la ecuación

$$\hat{b}_k = \text{sgn}(y_k) = \text{sgn} \left( \int_0^\tau y(t) s_k(t) dt \right).$$

En donde

$$y(t) = \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) + \sigma n(t)$$

---

y  $s_k(t)$  es la firma del  $k$ -th usuario. Simplificando la expresión, para el caso de un solo usuario o en el caso en que las firmas  $s_k$  son ortogonales llegamos a

$$\hat{b}_k = \text{sgn}(y_k) = \text{sgn}(A_k b_k + n_k),$$

con  $n_k = \sigma \int_0^T n(t) s_k(t) dt$ . Este modelo monousuario es importante, dado que sirve como una pauta para comparar el desempeño de los sistemas multiusuarios, donde la interferencia mutua incrementa la probabilidad de error entre otros aspectos.

## 1.6. Probabilidad de Error

Como ya lo mencionamos, un receptor tiene como función estimar los bits que se transmitieron, pero no siempre es posible decodificar correctamente el bit transmitido con la información recibida. Por lo tanto, hablar de una probabilidad de error tiene sentido, es decir, la probabilidad de que el receptor decodifique mal un bit recibido. Usualmente para un sistema simple con solo un filtro adaptado como componente principal, tomamos a  $\hat{b}_k = \text{sgn}(y_k)$ . Entonces, la probabilidad de error para una potencia de ruido  $\sigma^2$  en un régimen monousuario se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P_k^c(\sigma) &= P[\hat{b}_k \neq b_k] \\ &= P[b_k = 1]P[A_k + n_k < 0 | b_k = 1] + P[b_k = -1]P[-A_k + n_k > 0 | b_k = -1]. \end{aligned}$$

Dado que  $n_k$  es Gaussiano y asumiendo que  $P[b_k = 1] = P[b_k = -1]$ , tenemos que

$$P_k^c(\sigma) = P[n_k > A_k] = Q\left(\frac{A_k}{\sigma}\right),$$

donde

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

## 1.7. Comportamiento Multiusuario con Firmas no Ortogonales

Si dejamos de lado el caso monousuario y comenzamos a tomar en cuenta las interferencias mutuas entre usuarios, como sucede para el caso del Espectro Ensanchado por Secuencia Directa, entonces llegaremos a la siguiente expresión para la salida de un solo usuario

$$y_k = A_k b_k + \sum_{j \neq k} A_j \rho_{jk} + n_k.$$

Si  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_K]^T$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_K]^T$ ,  $\mathbf{A} = \text{diag}\{A_1, \dots, A_K\}$  y  $\mathbf{n}$  es un vector Gaussiano de media cero y matriz de covarianza  $\sigma \mathbf{R}$ , entonces tenemos que la

salida del filtro adaptado de manera conjunta para todos los usuarios está dada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}.$$

Ya que contamos con una descripción más o menos útil del sistema, procederemos a analizar diversos aspectos de este.

## 1.8. El Detector Lineal MMSE

El detector lineal mínimo error cuadrático medio, MMSE por sus siglas en inglés, es un receptor muy similar al Filtro Adaptado, solamente que en este detector, para el usuario  $k$  en lugar de tomar  $\langle y(t), s_k(t) \rangle$  como base de decisión se usa  $\langle y(t), c_k(t) \rangle$  en su lugar, donde  $c_k(t)$  es una forma de onda tal que se alcanza el siguiente mínimo

$$\min_{c_k} E [(b_k - \langle c_k, y \rangle)^2], \quad (1.2)$$

y como decisión a la salida se toma  $\hat{b}_k = \text{sgn}(\langle c_k, y \rangle)$ , aunque la importancia fundamental de este sistema reside en el hecho de que los productos internos  $\langle c_k, y \rangle$  pueden ser usados como entradas para sistemas de procesamientos de datos mas complejos. Se puede probar que encontrar dicha forma de onda para cada uno de los  $K$  usuarios es equivalente a encontrar una matriz  $M$  de dimensión  $K \times K$  tal que se alcance el mínimo (Verdú [2] pág. 293)

$$\min_{M \in R^{K \times K}} E [\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\|^2],$$

donde  $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}$ , con la esperanza tomada con respecto al vector de valores transmitidos  $\mathbf{b}$  y el vector de ruido  $\mathbf{n}$ . Tomando en cuenta que  $\|\mathbf{x}\|^2 = \text{tr}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$  y que  $\text{cov}\{\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\} = E[(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y})(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y})^T]$  podemos derivar la siguiente relación

$$\min_{M \in R^{K \times K}} E [\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\|^2] = \text{tr}\{[\mathbf{I} + \sigma^{-2}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}]^{-1}\},$$

donde el mínimo se alcanza cuando  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2}]^{-1}$ . Si todos los usuarios desarrollan la misma potencia en el receptor entonces  $A_i = A_j = A \forall i, j$  por lo cual la esperanza con respecto a las firmas tiene la expresión

$$\begin{aligned} E \left[ \min_{c_k} E [(b_k - \langle c_k, y \rangle)^2] \right] &= E \left[ \left[ \mathbf{I} + \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbf{R} \right]_{kk}^{-1} \right] = \frac{1}{K} E \left[ \text{tr} \left[ \mathbf{I} + \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbf{R} \right]^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{K} E \left[ \sum_{j=1}^K \lambda_j \left( \left[ \mathbf{I} + \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbf{R} \right]^{-1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Este último valor esperado nos sirve como un indicador de que tan bueno es el sistema, y por lo tanto se vuelve de interés no solamente evaluarlo para cantidades fijas de usuarios sino también conocer su comportamiento asintótico. Es en la búsqueda de evaluar este comportamiento asintótico, donde entra en juego el Teorema de Marchenko-Pastur.

---

## 1.9. El Teorema de Marchenko-Pastur

A continuación se enuncia el Teorema de Marchenko-Pastur en un lenguaje de comunicación inalámbrica, y en específico, en el contexto del Espectro Ensanchado por Secuencia Directa.

### Teorema de Marchenko-Pastur (Comunicaciones Inalámbricas)

Supongamos que  $K$  usuarios emplean formas de onda propias del Espectro Ensanchado por Secuencia Directa con  $N$  chips por firma, y que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{N} = \beta \in (0, \infty).$$

Supongamos que la asignación de las secuencias de las firmas es completamente aleatoria: las secuencias asignadas a cada usuario son independientes, y todas las secuencias binarias son equiprobables. Entonces, el porcentaje de los  $K$  eigenvalores de la matriz de covarianza  $\mathbf{R}$  que pertenecen debajo de  $x$  convergen (cuando  $K \rightarrow \infty$ ) a la función de distribución de la función de densidad

$$f_\beta(x) = [1 - \beta^{-1}]^+ \delta(x) + \frac{\sqrt{[x - a]^+ [b - x]^+}}{2\pi\beta x},$$

donde  $[z]^+ = \max\{0, z\}$ ,  $a = (1 - \sqrt{\beta})^2$  y  $b = (1 + \sqrt{\beta})^2$ . Además, si  $\beta \leq 1$ , entonces el menor eigenvalor converge casi seguramente a  $a$ .

## 1.10. MMSE Promedio

Teniendo en cuenta el Teorema de Marchenko-Pastur podemos proceder a calcular el MMSE asintótico promedio. Para esto recordemos que

$$E \left[ \min_{c_k} E [(b_k - < c_k, y >)^2] \right] = E_{\mathbf{R}} \left[ \left[ \mathbf{I} + \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbf{R} \right]_{kk}^{-1} \right] \quad (1.3)$$

$$= \frac{1}{K} E \left[ \text{tr} \left[ \mathbf{I} + \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbf{R} \right]^{-1} \right] \quad (1.4)$$

$$= E \left[ \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \lambda_j \left( \left[ \mathbf{I} + \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbf{R} \right]^{-1} \right) \right]. \quad (1.5)$$

A partir de esta última ecuación podemos llegar a la siguiente expresión la cual resultará muy útil más adelante.

$$E \left[ \min_{c_k} E [(b_k - < c_k, y >)^2] \right] = E \left[ \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{1}{1 + \frac{A^2}{\sigma^2} \lambda_i(\mathbf{R})} \right] \quad (1.6)$$

$$= E \left[ E \left[ \frac{1}{1 + \frac{A^2}{\sigma^2} \tilde{\lambda}(\mathbf{R})} \right] \right]. \quad (1.7)$$

---

El valor esperado interno en la última ecuación es tomado respecto a  $\tilde{\lambda}$  que es una variable aleatoria cuya función de distribución es la distribución empírica espectral de  $\mathbf{R}$ . La distribución empírica espectral de una matriz  $A$  de dimensión  $K \times K$  se define como

$$F_A(x) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{1}_{\{\lambda_i(A) \leq x\}}.$$

Es importante resaltar que la función  $\tilde{\lambda}$  es aleatoria y depende de  $\mathbf{R}$ . Ahora solo nos falta aplicar el límite para evaluar el MMSE asintótico promedio, obteniendo

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E \left[ \min_{c_k} E[(b_k - \langle c_k, y \rangle)^2] \right] = E \left[ \frac{1}{1 + \frac{A^2}{\sigma^2} \tilde{\lambda}_0} \right] \quad (1.8)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E \left[ \min_{c_k} E[(b_k - \langle c_k, y \rangle)^2] \right] = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \frac{A^2}{\sigma^2} x} f_\beta(x) dx. \quad (1.9)$$

Notemos que al tomar el límite  $K \rightarrow \infty$  la función de densidad de  $\tilde{\lambda}$  converge a la densidad de Marchenko-Pastur y deja de depender de  $\mathbf{R}$ , lo cual lo representamos con el cambio de  $\tilde{\lambda}$  por  $\tilde{\lambda}_0$ , misma que no tiene parámetros. Resolviendo la integral anterior tenemos que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E \left[ \min_{c_k} E[(b_k - \langle c_k, y \rangle)^2] \right] = 1 - \frac{1}{4\beta} \frac{A^2}{\sigma^2} F \left( \frac{A^2}{\sigma^2}, \beta \right),$$

donde  $F(x, z) = \left( \sqrt{x(1 + \sqrt{z})^2 + 1} - \sqrt{x(1 - \sqrt{z})^2 + 1} \right)^2$ . Con lo cual obtenemos una expresión para el MMSE asintótico promedio.

## 1.11. Cálculo del SIR

La relación señal a interferencia (SIR por siglas en inglés de Signal to Interference Ratio) se define como la relación entre la energía de la señal en la cual estamos interesados contra la energía de los demás usuarios más el ruido del canal. Por ejemplo a la salida de el filtro adaptado con firmas no ortogonales el SIR alcanzado es

$$\text{SIR} = \frac{A_k^2}{\sigma^2 + \sum_{j \neq k} A_j^2 \rho_{jk}^2}.$$

El SIR tiene muchas aplicaciones y consecuencias. Entre ellas destacan que a partir del SIR pueden ser calculadas la probabilidad de error y la capacidad del canal, además de otras aplicaciones similares que hasta cierto punto nos dan una descripción del comportamiento del canal, por lo tanto evaluar el comportamiento asintótico del SIR es importante.

El procedimiento para calcular el SIR asintótico es muy similar al procedimiento realizado para calcular el MMSE asintótico promedio, por lo que pasaremos

---

directamente a la aplicación del Teorema de Marchenko-Pastur. Una expresión para el SIR a la cual se puede llegar es la siguiente

$$E[\text{SIR}] = E \left[ E \left[ \frac{A^2}{\sigma^2 + A^2 \beta \tilde{\lambda} \left( \frac{1}{\beta} \sum_{k=2}^K \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \right)} \right] \right]$$

donde las  $\mathbf{s}_k$  son las definidas en la Sección 1.4. Al tomar el límite cuando el número de usuarios  $K \rightarrow \infty$  nos lleva a la siguiente relación

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} E \left[ E \left[ \frac{A^2}{\sigma^2 + A^2 \beta \tilde{\lambda} \left( \frac{1}{\beta} \sum_{k=2}^K \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \right)} \right] \right] &= \int_0^\infty \frac{A^2}{\sigma^2 + A^2 \beta x} f_{1/\beta}(x) dx \\ \lim_{K \rightarrow \infty} E[\text{SIR}] &= \frac{A^2}{\sigma^2} - \frac{1}{4} \mathbf{F} \left( \frac{A^2}{\sigma^2}, \beta \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Los cálculos detallados pueden encontrarse en Verdú [2] pág. 304. La importancia de las expresiones para el MMSE asintótico promedio y para el SIR asintótico reside en que estas expresiones nos dan una idea sobre el comportamiento que podemos esperar del sistema cuando el número de usuarios crece, lo cual nos ayuda a definir los límites del sistema comercialmente hablando. Con esta aplicación del Teorema de Marchenko-Pastur se concluye la discusión de este sistema de comunicaciones.

## Capítulo 2

# Sistemas Multiantena

### 2.1. Introducción

Este capítulo está dedicado al análisis de sistemas monousuario usando múltiples antenas tanto en el receptor como en el transmisor sujetos a alguna limitación en la potencia total del transmisor. Estos sistemas son de interés práctico dado que, como se mostrará en este capítulo, la capacidad asintótica del canal depende linealmente de las antenas transmisoras para el caso en el que se tienen igual número de antenas receptoras y transmisoras. Es en el cálculo de la capacidad asintótica del canal donde volveremos a encontrar al Teorema de Marchenko-Pastur.

En la siguiente sección se tratará brevemente lo concerniente a la modulación, no se entrará en detalles que queden fuera del carácter de este escrito, por lo cual solo se expondrán las ideas principales acerca la modulación de las señales, la interacción de estas con el canal y se dará una explicación intuitiva de porque se modela la ganancia del sistema como un número complejo.

En la Sección 2.4 se asumirá un teorema acerca de la capacidad del canal ya que la derivación de dicha expresión para la capacidad a partir del modelo del canal implica conocer ciertos elementos de teoría de la información, tales como entropía, los cuales necesitarían un resumen tan extenso o más que este para su debida explicación, por lo cual no se realizará dicha derivación.

### 2.2. Modulación

Esta sección está dedicada a dar una breve introducción a la modulación. El fin no es abarcar todos los tipos de modulación existentes ni mucho menos, el objetivo principal es dar una introducción desde el punto de vista matemático a las principales tareas de la modulación. Por lo general modulación se refiere a transmitir información por medio de una onda sinusoidal, en nuestro caso analizaremos un sistema denominado QAM (por sus siglas en inglés Quadrature Amplitude Modulation). Dicho sistema codifica información mediante el cambio

---

de la amplitud de dos ondas, una seno y otra coseno las cuales se transmiten simultáneamente. En otras palabras, la señal transmitida tiene la siguiente forma

$$s(t) = a \cos(2\pi f_c t) - b \sin(2\pi f_c t), \quad (2.1)$$

con  $a \in A$ ,  $b \in B$ , donde los conjuntos  $A$ ,  $B$  son los valores posibles (finitos) que pueden tomar las amplitudes del coseno y el seno respectivamente y  $f_c$  es la frecuencia denominada frecuencia portadora. La frecuencia portadora recibe este nombre puesto que es la frecuencia de la onda sinusoidal portadora de la información, la cual es transmitida por medio de la antena. Es claro que la demodulación busca el proceso inverso, es decir, se recibe una señal posiblemente distorsionada y se trata de inferir los valores de  $a$  y  $b$  lo mejor posible. Definamos  $V_m = \sqrt{a^2 + b^2}$  y  $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ . Es claro que  $V_m \cos(\phi) = a$  y que  $V_m \sin(\phi) = b$ , lo cual implica

$$\begin{aligned} s(t) &= V_m \cos(\phi) \cos(2\pi f_c t) - V_m \sin(\phi) \sin(2\pi f_c t) \\ s(t) &= V_m (\cos(\phi) \cos(2\pi f_c t) - \sin(\phi) \sin(2\pi f_c t)) \\ s(t) &= V_m \cos(2\pi f_c t + \phi) = \Re \left[ V_m e^{i(2\pi f_c t + \phi)} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La interacción del canal con la señal, también conocida como atenuación, que consideramos tiene dos efectos en la señal modulada. En primer lugar atenúa la amplitud de la señal enviada, es decir modifica el valor de  $V_m$ . En segundo lugar cambia la fase de la señal sumándole una desviación en la fase. En otras palabras afecta a  $s(t)$  de tal manera que la onda recibida se vería como

$$r(t) = \alpha V_m \cos(2\pi f_c t + \phi + \theta). \quad (2.3)$$

Físicamente se ha encontrado que un modelo que ajusta muy bien al comportamiento de  $\alpha$  y  $\theta$  es en el cual  $\alpha$  tiene la distribución de Rayleigh  $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$  y  $\theta$  se distribuye uniformemente en  $[0, 2\pi)$ . Tomando en cuenta lo anterior y la expresión 2.2 podemos demostrar que la señal recibida puede escribirse de la forma

$$r(t) = \Re \left[ (X + iY) V_m e^{i(2\pi f_c t + \phi)} \right], \quad (2.4)$$

donde  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias Gaussianas independientes de media cero y varianza  $\frac{1}{2}$ . El valor  $x + iy$  lo podemos pensar entonces como una *ganancia* del canal que representa el cambio que sufre la señal en su paso por el medio de transmisión.

### 2.3. Modelo del Canal

El sistema que aquí discutimos posee un solo trasmisor y un solo receptor, a diferencia del capítulo anterior en el cual se tenían múltiples usuarios. El transmisor tiene  $t$  antenas por las cuales transmitir, y el receptor posee  $r$  antenas,



---

además definiremos  $n = \max\{r, t\}$  y  $m = \min\{r, t\}$ . El sistema cuenta con una salida  $\mathbf{y}(t)$  la cual es un vector de dimensión  $r$ , y cuenta con una entrada  $\mathbf{x}(t)$  la cual es un vector de dimensión  $t$ , estos vectores representan las señales que son transmitidas o recibidas según sea el caso. Estos vectores son complejos debido a que representan señales como las discutidas en la sección anterior. El modelo del canal con el cual trabajaremos tiene la forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n},$$

donde  $\mathbf{H} = \{h_{ij}\}$  es la matriz que modela los coeficientes de propagación  $h_{ij}$  entre cada antena receptora  $i$  y cada antena transmisora  $j$ . Por lo dicho en la sección anterior, los coeficiente  $h_{ij}$  son variables aleatorias Gaussianas complejas independientes, lo que se conoce como atenuación de Rayleigh. El vector  $\mathbf{n}$  representa el vector de ruido, el cual tiene las mismas características que el ruido introducido en el capítulo anterior. Como ya se habrá notado, cada antena receptora aprecia la suma conjunta de las señales de las antenas transmisoras con su respectivo coeficiente de propagación, más un ruido Gaussiano complejo. Un detalle importante es que supondremos que el receptor conoce el estado del canal en todo momento, esto es, que se conoce a la matriz  $\mathbf{H}$  en cualquier instante, y se supondrá además que el transmisor conoce la distribución de  $\mathbf{H}$ . Estos supuestos son totalmente validos dado que en muchos sistemas reales se implementan dispositivos que nos permiten rastrear el estado del canal.

## 2.4. Capacidad del Canal

Por razones que ya mencionamos anteriormente, usaremos el siguiente teorema, el cual involucra algunos resultados de teoría de la información para su demostración, la demostración se puede encontrar en Telatar [3]. Algo que si es importante comentar en este punto es que la capacidad de un canal puede ser interpretada como la máxima cantidad de información que puede pasar a través de un canal, por lo que conocer los límites teóricos de esta cantidad es primordial en el análisis de los sistemas de comunicaciones.

**Teorema 2.1** La capacidad de un canal Gaussiano con atenuación de Rayleigh es alcanzada cuando  $\mathbf{x}$  es un vector aleatorio Gaussiano complejo circular simétrico con media cero y covarianza  $\frac{P}{t}I_t$ . Además, en esta situación la capacidad esta dada por

$$C = E \left[ \log \det \left( I_r + \frac{P}{t} \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger \right) \right]. \quad (2.5)$$

A partir de la expresión 2.5 obtendremos una ecuación útil para analizar la capacidad asintótica del canal cuando  $\frac{n}{m} \rightarrow \beta \geq 1$  y  $n \rightarrow \infty$ . Usando la expresión 2.5 y tomando en cuenta el hecho que  $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A)$  donde  $A$  es una matriz cuadrada y  $\{\lambda_i(A)\}_{1 \leq i \leq n}$  sus eigenvalores ordenados, podemos derivar la siguiente expresión

---


$$E \left[ \log \det \left( I_r + \frac{P}{t} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right] = E \left[ \log \prod_{i=1}^m \lambda_i \left( I_r + \frac{P}{t} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right] \quad (2.6)$$

$$E \left[ \log \prod_{i=1}^m \lambda_i \left( I_r + \frac{P}{t} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right] = E \left[ \sum_{i=1}^m \log \lambda_i \left( I_r + \frac{P}{t} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right] \quad (2.7)$$

$$E \left[ \sum_{i=1}^m \log \lambda_i \left( I_r + \frac{P}{t} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right] = E \left[ \sum_{i=1}^m \log \left( 1 + \frac{P}{t} \lambda_i \left( \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right) \right] \quad (2.8)$$

$$C = E \left[ \sum_{i=1}^m \log \left( 1 + \frac{P}{t} \lambda_i \left( \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right) \right]. \quad (2.9)$$

Recordemos que la distribución empírica espectral de una matriz cuadrada  $A$  de  $K \times K$  se define como

$$F_A(x) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{1}_{\{\lambda_i(A) \leq x\}}.$$

Ahora, cambiaremos la serie de la expresión 2.9 usando en su lugar una integral sobre la distribución empírica espectral

$$\sum_{i=1}^m \log \left( 1 + \frac{P}{t} \lambda_i \left( \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right) = \int_0^\infty \log \left( 1 + \frac{P}{t} x \right) m dF^{\mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger}(x). \quad (2.10)$$

Si  $\mathbf{W} = \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger$ , entonces la siguiente relación se cumple

$$F^{\frac{1}{m} \mathbf{W}}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\{\lambda_i(\frac{1}{m} \mathbf{W}) \leq x\}} \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\{\frac{1}{m} \lambda_i(\mathbf{W}) \leq x\}} \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\{\lambda_i(\mathbf{W}) \leq mx\}} \quad (2.13)$$

$$= F^{\mathbf{W}}(mx). \quad (2.14)$$

Usando esta relación obtenemos la siguiente ecuación

$$\sum_{i=1}^m \log \left( 1 + \frac{P}{t} \lambda_i(\mathbf{W}) \right) = \int_0^\infty \log \left( 1 + \frac{P}{t} mx \right) m dF^{\mathbf{W}}(mx)$$

Con lo cual llegamos a la siguiente expresión

---


$$C = E \left[ \sum_{i=1}^m \log \left( 1 + \frac{P}{t} \lambda_i (\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger) \right) \right] \quad (2.15)$$

$$= E \left[ \int_0^\infty \log \left( 1 + \frac{Pm}{t} x \right) m dF^{\frac{1}{m}} \mathbf{W}(x) \right]. \quad (2.16)$$

## 2.5. El Teorema de Marchenko-Pastur

Recordemos que  $t$  es el número de antenas transmisoras,  $r$  es el número de antenas receptoras,  $n = \max\{r, t\}$  y  $m = \min\{r, t\}$ . Como se vio en la sección anterior, la capacidad de un sistema multiantena con atenuación de Rayleigh esta determinada por

$$C = E \left[ \int_0^\infty \log \left( 1 + \frac{Pm}{t} x \right) m dF^{\frac{1}{m}} \mathbf{W}(x) \right]. \quad (2.17)$$

Si  $\frac{n}{m} \rightarrow \beta \geq 1$  mientras  $n \rightarrow \infty$ , la ley de Marchenko-Pastur nos proporciona el siguiente resultado

$$\frac{dF^{\frac{1}{m}} \mathbf{W}(x)}{dx} \rightarrow \frac{\sqrt{[x-a]^+ [b-x]^+}}{2\pi x} = \beta f_\beta(x), \quad (2.18)$$

donde  $a = (1 - \sqrt{\beta})^2$  y  $b = (1 + \sqrt{\beta})^2$ . Por lo tanto

$$\frac{C}{m} \rightarrow \int_a^b \log \left( 1 + \frac{Pm}{t} x \right) \beta f_\beta(x) dx. \quad (2.19)$$

Esto nos da una expresión para la capacidad en función del número de antenas transmisoras, el número de antenas receptoras y la potencia del transmisor. Por ejemplo para el caso particular con  $n = m = r = t$  tenemos  $a = 0$  y  $b = 4$ , con una capacidad de

$$C \sim r \int_0^4 \log(1 + Px) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}} dx. \quad (2.20)$$

Por lo tanto la capacidad asintótica depende linealmente del número de antenas receptoras o transmisoras para el caso en el que  $t = r$ .

---

# Conclusiones

En el presente trabajo se mostró brevemente la vinculación de la teoría de matrices aleatorias en la comunicación inalámbrica. Si bien se asumieron distribuciones independientes en las entradas de las matrices aquí expuestas, en otras situaciones podemos necesitar de matrices de otra naturaleza como por ejemplo una dependencia en algún sentido entre las entradas de las matrices (véase Chuah [6]). Por tanto, las conexiones entre la teoría de matrices aleatorias y las comunicaciones inalámbricas no se restringen únicamente a aplicaciones del Teorema de Marchenko-Pastur.

Todas las matrices que discutimos aquí, son Gaussianas o similares (la matriz  $\mathbf{S}$  toma valores en  $\{\pm \frac{1}{\sqrt{N}}\}$ ). Sin embargo, diferentes modelos para el canal pueden necesitar diferentes distribuciones en las entradas de las matrices en cuestión (por ejemplo [7]), ya sea que estas matrices modelen las firmas asignadas a los usuarios, la atenuación debida al medio o cualquier otro aspecto del sistema de comunicaciones.

Otro aspecto relevante es la velocidad de convergencia, porque si bien en el SS-CDMA el número de usuarios tiende a ser grande, en un sistema multiantena típico la cantidad de antenas es relativamente pequeña. Por lo cual es indispensable saber con que velocidad convergen los resultados.

Una aplicación de la que no hablamos en este resumen y que está bastante relacionada con lo discutido en el párrafo anterior es el cálculo de la capacidad para valores fijos de  $r$  y de  $t$ , lo cual puede lograrse mediante cálculos meramente teóricos o mediante el uso de simulación (véase por ejemplo Telatar [3]).

En síntesis, la teoría de matrices aleatorias tiene un vínculo extremadamente fuerte con las comunicaciones inalámbricas, ya que gracias a diversas herramientas de esta teoría es posible calcular el desempeño teórico de una enorme cantidad de modelos y situaciones que se dan en las comunicaciones inalámbricas.

---

# Bibliografía

- [1] A. Tulino and S. Verdú, **Random Matrix Theory and Wireless Communications**, Communications and Information Theory, June 2004.
- [2] Sergio Verdú, **Multiuser Detection**, Cambridge University Press, New York, NY, 1998.
- [3] E. Telatar, **Capacity of multi-antenna Gaussian channels**, Euro. Trans. Telecommunications, vol. 10, pp. 585-595, Nov.-Dec. 1999.
- [4] C. E. Shannon, **A mathematical theory of communication**, Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, July and October, 1948.
- [5] J. G. Proakis, **Digital Communications 3rd Ed**, McGraw-Hill, 1995.
- [6] Chen-Nee Chuah, David N. C. Tse, Joseph M. Kahn, Reinaldo A. Valenzuela, **Capacity scaling in MIMO wireless systems under correlated fading**, IEEE Trans. on Information Theory, vol. 48, pp. 637-650, March 2002.
- [7] Guillaume Lebrun, Michael Faulkner, Mansoor Shafi, Peter J. Smith, **MIMO rician channel capacity: an asymptotic analysis**, IEEE Trans. on Wireless Communications, vol. 5, pp. 1343-1350, June 2006.