UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

SOBRE LOS NÚMEROS NORMALES DE BOREL Y ALGUNAS VARIANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

GUILLERMO BASULTO ELÍAS

DIRECTOR DE TESIS

Dr. VÍCTOR MANUEL PÉREZ ABREU CARRIÓN

GUANAJUATO, GTO. AGOSTO DE 2009

A mi mamá y mis hermanas,

Lety, Diana y Viry.

Contenido

Agradecimientos

A mi asesor, el Dr. Víctor M. Pérez Abreu, por su inmensa paciencia, su entusiasmo, sus excelentes comentarios y su gran dedicación.

A mis sinodales, el Dr. Víctor Rivero Mercado y el Dr. Joaquín Ortega Sánchez por sus valiosas observaciones.

A mi mamá y mis hermanas por apoyarme en todos los sentidos y porque sin ellas no hubiera sido posible esto.

A todos mis profesores, amigos y compañeros que compartieron conmigo su conocimiento a lo largo de la licenciatura.

A CONCYTEG y al CIMAT por todos los apoyos económicos que recibí a lo largo de la carrera.

Introducción

Émile Borel [8] introdujo en 1909 los números normales en el contexto del estudio de un modelo matemático para el lanzamiento de una moneda balanceada un número infinito de veces. Puede pensarse en un número normal en base dos como aquél cuya expansión binaria se comporta como el resultado de los lanzamientos, registrando 1 si cae sol y 0 si cae águila. De una manera análoga se define un número normal en base b, para cualquier base b. Un número es absolutamente normal si es normal en toda base.

Borel demostró que casi todo número es normal para cada base con respecto a la medida de Lebesgue en el intervalo $(0, 1]$, y por tanto, casi todo número es absolutamente normal. Este resultado fue la primera Ley Fuerte de Grandes Números, que es un caso particular del resultado general establecido en 1933 por Andrei Kolmogorov [18] en el Capítulo VI de su libro *Fundamentos de la Probabilidad.* De hecho, fue Borel quien señaló por primera vez que existía una relación entre la probabilidad y la teoría de la medida, lo que motivó numerosas investigaciones en esta dirección, de las cuales el libro de Kolmogorov es fundamental.

Los números no-normales también tienen propiedades interesantes. Por ejemplo, forman un conjunto denso y no-numerable en el intervalo $(0, 1]$. Khoshnevisan [17] recopila varios resultados que muestran la importancia y complejidad de los números no-normales.

Si bien casi todo número es absolutamente normal, hasta donde sabemos no existe un ejemplo explícito. En 1917 Sierpinski [27] dio un algoritmo para calcular un número absolutamente normal, sin embargo este algoritmo es de orden exponencial con respecto al tiempo de cómputo y no es viable calcularlo aún en tiempos actuales; siendo éste uno de los temas de la tesis doctoral de Figueira [12] en 2006. Los ejemplos existentes de números normales en alguna base son todos artificialmente construidos y en el caso de base dos, por ejemplo, existen números que no parecen ser el resultado del experimento aleatorio de lanzar una moneda balanceada un número infinito de veces. Uno de los ejemplos más populares de número normal en alguna base fue el dado por Champernowne [10] en 1933, el cual se obtiene mediante concatenación de los números naturales en base diez,

$$0.\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,\ldots$$

o en forma similar la concatenación respectiva de los números naturales en base b, es normal en esta base.

Es sorprendente que no se haya demostrado hasta el momento que números irracionales populares como $\pi, e, \sqrt{2}, \ln(2)$ y $\zeta(3)$, entre otros, sean normales o no en alguna base, aunque se ha encontrado evidencia empírica y teórica que sí lo son, como lo señalan Pincus [22] y Bailey & Crandall [2], [3], respectivamente.

Por otro lado, se han encontrado familias de números que son normales en alguna base fija, como las que muestran Bailey & Crandall [2] y Schmidt [26], y existen varias propiedades de números normales relacionadas con cambios de base, como lo han estudiado Wall [28] y Schmidt [26], entre otros.

El estudio de los números normales no se limita a la Teoría de Probabilidad; existen varios ejemplos en donde se usan otras áreas de las matemáticas para su estudio. Por ejemplo, Queffélec [23] ilustra cómo la Teoría de Números, la Teoría Ergódica y la Topología se ha usado para demostrar propiedades de números normales, mientras que Bailey & Crandall [3] estudian la relación entre números normales y los generadores de números aleatorios.

El enfoque probabilístico de Borel para el estudio de los números normales en una base dada conlleva a considerar el soporte de la Ley Fuerte de Grandes Números para la distribución binomial del número de veces que aparece un dígito dado en los primeros n dígitos de su expansión en esta base. El objetivo de esta tesis es proponer y estudiar algunas variantes de este enfoque, pero considerando el soporte de otros teoremas límite de probabilidad casi segura, como la Ley del Logaritmo Iterado y un Teorema del Límite Central casi seguro. Asimismo consideramos también un muestreo tipo Pascal y su correspondiente Ley Fuerte de Grandes Números, en lugar del muestreo binomial.

Específicamente, a partir de la Ley del Logaritmo Iterado introducimos el conjunto de números normales-LLI y encontramos que este es un conjunto de probabilidad uno propiamente contenido en el conjunto de números normales de Borel. En particular mostramos que esta nueva clase de números normales no contiene a un número tan artificial y “no aleatorio” como el número de Champernowne en base dos. Asimismo, mostramos que el conjunto de números normales-LLI es más pequeño que el conjunto de números fuertemente normales, el cual fue propuesto en 2005 en la tesis de maestría de Belshaw [4]. Este conjunto también tiene probabilidad uno y está contenido en el conjunto de los números de Borel.

Por otro lado, como un estudio inicial, proponemos el uso de un Teorema de Límite Central con convergencia casi segura para dar otra definición alternativa de números normales. Mostramos que este conjunto está contenido en el conjunto de números normales de Borel. Un problema para el futuro es encontrar una relación de esta nueva clase de números normales con los números normales-LLI.

Finalmente, con respecto al estudio del comportamiento de los dígitos de un número usando muestreo de tipo Pascal, es decir, al observar cuánto hay que esperar para obtener cierta cantidad de veces un dígito dado, probamos que un número que está en el soporte de la Ley Fuerte de Grandes Números en la distribución de Pascal es también un número normal de Borel y viceversa.

La estructura de la tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 se presenta la definición de números normales, así como un resumen de los principales resultados y ejemplos que se tienen hasta el momento de números normales en alguna base; particularmente se demuestra que el número de Champernowne es normal en base diez, siguiendo la demostración de Champernowne [10]. En el Capítulo 2 se usa la Ley del Logaritmo Iterado para definir las clases de números simplemente normales-LLI y normales-LLI. Se propone un algoritmo para construir un ejemplo de un número que satisfaga la definición de normalidad simple-LLI. Asimismo, se comparan los números normales-LLI con los números fuertemente normales de Belshaw. El Capítulo 3 se divide en dos partes: en la primera se propone una definición de números normales usando la Ley Fuerte de Grandes Números en el muestreo tipo Pascal en un ensayo Bernoulli. En la segunda parte se propone una primera definición basada en un Teorema del Límite Central con Convergencia casi segura. Recordemos que, a diferencia de la Ley Fuerte de Grandes Números y la Ley del Logaritmo Iterado, el Teorema del Límite Central involucra convergencia en distribución, que es más débil que convergencia casi segura.

Con el objeto de hacer la lectura de este trabajo lo más independiente posible, se incluyen dos apéndices. En el Apéndice A se presenta la prueba de la Ley del Logaritmo Iterado para un caso especial, que es el que se usa en esta tesis. En el Apéndice B se dan las ideas principales de la demostración del Teorema del Límite Central con convergencia casi segura que usamos en el Capítulo 3.

Capítulo 1

Números Normales de Borel

En este capítulo se presenta una introducción a los números normales de Borel. Se da la definición formal y general de números normales, de la misma forma en que lo hizo Borel. Se dan equivalencias y ejemplos de números normales en alguna base y se presentan propiedades bien conocidas de números normales. En particular se demuestra que casi todo número es normal para cada base, con respecto a la medida de Lebesgue; y por tanto, casi todo número es absolutamente normal. También se dan algunas propiedades que relacionan los números normales en diferentes bases.

1.1 Definiciones y Equivalencias

Un número $x \in (0, 1]$ normal en base b puede pensarse como tal que los dígitos de su expansión $b-$ádica parecen ser el resultado de girar una ruleta justa con posibles resultados $0, 1, \ldots, b-1$, un número infinito de veces, o bien, la realización de una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con distribución uniforme discreta que toma valores en $\{0, 1, \ldots, b-1\}$. Es de esperar que, por ejemplo, el número de veces que aparece el dígito $a \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ en los primeros n dígitos de la expansión $b-$ádica de x tenga distribución binomial con parámetros n y b^{-1}. De esta manera, una formalización de número normal en cierta base, podría ser si sus dígitos satisfacen alguna propiedad de ensayos Bernoulli.

En esta tesis, a menos de que se especifique lo contrario, consideramos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $\Omega = (0,1]$, $\mathcal{F} = \mathfrak{B}\left((0,1]\right)$ y $\mathbb{P} = \lambda$, donde $\mathfrak{B}\left((0,1]\right)$ son los borelianos en el $(0,1]$ y λ es la medida de Lebesgue. Si b es una base y a es un b-dígito, entonces entendemos que $b \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ y $a \in \{0, 1, ..., b-1\}$.

La **expansión** $b-$**ádica** del número $x \in \Omega$ es la representación $0.d_1^b(x)\ d_2^b(x)\ d_1^b(x)\ \ldots_b$ (el subíndice b indica la base de la expansión que se está presentando), donde las funciones $d_j^b : \Omega \to \{0, 1, \ldots, b-1\}$ están dadas por:

$$d_1^b(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & 0 < x \leq 1/b, \\ 1 & \text{si} & 1/b < x \leq 2/b, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b-1 & \text{si} & (b-1)/b < x \leq 1 \end{cases}$$

y

$$d_k(x) = d_1\left(T^{k-1}x\right) \text{ para } k \geq 2,$$

con

$$Tx = \begin{cases} bx & \text{si} & 0 < x \leq 1/b, \\ bx-1 & \text{si} & 1/b < x \leq 2/b, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ bx-(b-1) & \text{si} & (b-1)/b < x \leq 1 \end{cases}.$$

Se cumple que para todo número $x \in \Omega$ y cada base b,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j^b(x)}{b^j}.$$

En cada base existen números con dos posibles representaciones; por ejemplo,

$$0.5 \quad \text{y} \quad 0.4\bar{9} \tag{1.1}$$

son dos posibles expansiones para el mismo número en base 10. La notación de expansión b-ádica que usamos aquí toma aquélla donde la cola de la expansión no se conforma por sólo ceros. Por ejemplo, en (1.1) tomamos $0.4\bar{9}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. La función $\boldsymbol{S^b_{a,n}} : \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$ es el número de veces que ocurre el $b-$dígito a en los primeros n dígitos de la expansión b-ádica del número $x \in \Omega$. Es decir,

$$S^b_{a,n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\left[d^b_j(x)=a\right]}.$$

Nuestro primer resultado muestra cómo los dígitos de un número pueden ser considerados ensayos de Bernoulli.

Proposición 1.1 *Para cada base b y cada dígito a, las funciones $\left(\mathbf{1}_{\left[d^b_j=a\right]}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ son v.a.i.i.d. en el espacio de probabilidad $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$ y su distribución es Bernoulli con probabilidad de éxito $1/b$.*

Demostración. Sean b una base y a un b-dígito. Primero demostraremos que $\mathbf{1}_{\left[d^b_j=a\right]}$ tiene distribución Bernoulli con probabilidad de éxito $1/b$:

Para $j \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\mathbf{1}_{\left(d^b_j=a\right)} = 1\right] &= \mathbb{P}\left(d^b_j = a\right) \\
&= \mathbb{P}\left\{\bigcup_{k=0}^{b^{j-1}-1}\left(\frac{k}{b^{j-1}} + \frac{a}{b^j}, \frac{k}{b^{j-1}} + \frac{a+1}{b^j}\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{b^{j-1}-1} \mathbb{P}\left\{\left(\frac{k}{b^{j-1}} + \frac{a}{b^j}, \frac{k}{b^{j-1}} + \frac{a+1}{b^j}\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{b^{j-1}-1} (a+1-a)\, b^{-j} = b^{j-1}b^{-j} \\
&= b^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{1}_{\left[d^b_j=a\right]}$ tiene distribución Bernoulli con parámetro b^{-1}, para cada j.

Ahora veamos que $\left(\mathbf{1}_{\left[d^b_j=a_j\right]}\right)_j$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, donde $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $b-$dígitos:

Sean $m_1, m_2, \ldots, m_k$ naturales distintos y ordenados de forma creciente y $a_1, \ldots, a_k$ b-dígitos. Hay b^{m_k-1} intervalos ajenos de longitud b^{m_k} que satisfacen $d^b_{m_k} = a_k$. Entonces hay $b^{m_{k-1}-m_k-1}$ intervalos ajenos de longitud $b^{m_{k-1}}$ que satisfacen $d^b_{m_{k-1}} = a_{k-1}$ y $d^b_{m_k} = a_k$.

De la misma forma, hay $b^{m_{k-2}-m_{k-1}-1}$ intervalos ajenos de longitud $b^{m_{k-2}}$ que satisfacen $d^b_{m_{k-2}} = a_{k-2}$, $d^b_{m_{k-1}} = a_{k-1}$ y $d^b_{m_k} = a_k$. Continuando así, tenemos que hay exactamente

$$b^{(m_k-1)+(m_{k-1}-m_k-1)+(m_{k-2}-m_{k-1}-1)+\cdots+(m_1-m_2-1)} = b^{m_1-k}$$

intervalos ajenos de longitud b^{-m_1} que satisfacen $d^b_{m_j} = a_j$, $\forall j \in \{1,\ldots,k\}$.

De esta forma tenemos que

$$\mathbb{P}\left(d^b_{m_j} = a_j,\ j = 1,2,\ldots,k\right) = b^{m_1-k}b^{-m_1} = b^{-k} = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}\left(d^b_{m_j} = a_j\right).$$

Por lo tanto, la sucesión $\left(d^b_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ es de variables aleatorias independientes. Entonces $\left(\mathbf{1}_{\left[d^b_j=a_j\right]}\right)_j$ también es sucesión de variables aleatorias independientes, pues $d^b_{m_j} = a_j$ si, y sólo si, $\mathbf{1}_{\left[d^b_{m_j}=a_j\right]} = 1$. ∎

De hecho, el número de veces que ocurre el b-dígito a en los primeros n dígitos de la expansión $b-$ádica, sigue una distribución binomial.

Corolario 1.1 *Para cada base b, $b-$dígito a y $n \in \mathbb{N}$, $S^b_{a,n}$ es una variable aleatoria en $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$ con distribución Binomial(n, b^{-1}), es decir,*

$$\mathbb{P}\left(S^b_{a,n} = k\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{b}\right)^k\left(\frac{b-1}{b}\right)^{n-k}.$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.1 y de la definición de $S^b_{a,n}$. ∎

Definición 1.1 Se dice que un número $x \in \Omega$ es **simplemente normal en base *b*** si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S^b_{a,n}(x)}{n} = \frac{1}{b}, \text{ para todo } b-\text{dígito } a.$$

Es decir, cada dígito aparece en la misma proporción en la expansión en base b del número x.

Decimos que $x \in \Omega$ es **normal en base *b*** si $\{b^j x\}$ es simplemente normal en base b^k para todos enteros $j \geq 0$ y $k \geq 1$, donde $\{\cdot\}$ representa la parte fraccional[1]. El número $x \in \Omega$ es **absolutamente normal** si es normal en base b, para toda base b.

[1] En el contexto se entenderá cuando las llaves se refieran a la parte fraccional de un número.

Algunas equivalencias de normalidad de un número que permiten entender mejor lo que significa este concepto, son las siguientes.

Definición 1.2 Una sucesión de números reales $(x_j)_j$ está **uniformemente distribuida** en el intervalo unitario si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{(c,d]}\left(\{x_n\}\right)}{n} = d - c,$$

donde $S_{(c,d]}(x_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{(c,d]}(x_j)$. Es decir, para cada subintervalo $(c, d] \subset \Omega$, la frecuencia relativa de elementos de la sucesión (en módulo uno) que están en él, se aproxima a la longitud del subintervalo , $d - c$, conforme n crece.

Por **cadena** entenderemos una sucesión finita de dígitos concatenados. Por ejemplo, la cadena 1231 aparece tres veces en $0.5\mathbf{1231231}9\mathbf{1231}\bar{5}$, pero ninguna en $0.\overline{412}$.

Teorema 1.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *El número $x \in \Omega$ es normal en base b.*

(ii) *Cada cadena de longitud k ocurre con frecuencia $1/b^k$ en la representación b-ádica de x.*

(iii) *La sucesión $(b^j x)_{j\in\mathbb{N}}$ está uniformemente distribuida en el intervalo unitario.*

La equivalencia entre (i) y (iii) fue demostrada por Wall [28] en su tesis doctoral en 1949. Por otro lado, Borel [8] planteó en su artículo de 1909 la equivalencia entre (i) y (ii). Champernowne [10], Copeland y Erdös [11], entre otros, tomaron (ii) como definición de número normal, sin embargo la equivalencia entre (i) y (ii) no fue demostrada hasta 1953 por Niven y Zuckerman [20]. La demostración que presentamos de la equivalencia entre (i) y (ii) es la que se da en el libro de Harman [14, Teorema 1.3]. La demostración de la equivalencia entre (ii) y (iii) es la que da Belshaw [4, Teorema 1]

Para demostrar que (ii) implica (i), es necesario el siguiente resultado.

Lema 1.1 *Sean d un b-dígito y $\varepsilon > 0$. Entonces el número de diferentes bloques de l dígitos, $D = d_1 \cdots d_l$, $(0 < l < b-1)$ para los cuales*

$$\left| \sum_{j=1}^{l} \mathbf{1}_{[d_j = d]} - \frac{l}{b} \right| \geq \varepsilon l,$$

no es mayor que εb^l, para l suficientemente grande.

Demostración de Lema 1.1. Primero consideremos las cadena D tales que

$$\frac{l}{b} - \sum_{j=1}^{l} \mathbf{1}_{[d_j = d]} \geq \varepsilon l.$$

El número de tales cadenas es

$$\sum_{k=0}^{\lfloor l/b - \varepsilon l \rfloor} \binom{l}{k} (b-1)^{l-k}.$$

Del teorema del binomio, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (b-1)^{l-k} = b^l.$$

Por otro lado, tenemos que para $\theta = l/b - j$ y l suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{l}{j} (b-1)^{l-j}}{\binom{l}{j+1} (b-1)^{l-j-1}} &= \frac{(j+1)(b-1)}{l-j} \\
&= \frac{(b-1)(l/b - \theta + 1)}{l + \theta - l/b} \\
&< 1 - b\frac{\theta - 1}{l} \\
&\leq 1 - \frac{\varepsilon b}{3}.
\end{aligned}$$

Entonces, si $m = \lfloor l/b - \varepsilon l \rfloor$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} \binom{l}{j} (b-1)^{l-j} &< \sum_{j=1}^{m+1} \binom{l}{j} (b-1)^{l-j} \left(1 - \frac{\varepsilon b}{3}\right) \\
&< \left(1 - \frac{\varepsilon b}{3}\right) \sum_{j=0}^{m+1} \binom{l}{j} (b-1)^{l-j} \\
&< \left(1 - \frac{\varepsilon b}{3}\right)^2 \sum_{j=0}^{m+2} \binom{l}{j} (b-1)^{l-j} \\
&\vdots \\
&< \left(1 - \frac{\varepsilon b}{3}\right)^{(b-1+\varepsilon)l/b} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} (b-1)^{l-j} \\
&= \left(1 - \frac{\varepsilon b}{3}\right)^{(b-1+\varepsilon)l/b} b^l \\
&< \left(1 - \frac{\varepsilon b}{3}\right)^{\varepsilon l/b} b^l \\
&< \frac{\varepsilon b^l}{2},
\end{aligned}$$

si l es suficientemente grande. La misma cota aplica cuando consideramos los bloques D con

$$\sum_{d \in H} 1 - \frac{l}{b} \geq \varepsilon l,$$

lo que completa la demostración. ■

Recordemos que una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **es** $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ **cuando** $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, con $a \in [-\infty, \infty]$, si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

De la misma forma $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **es** $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ **cuando** $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, con $a \in [-\infty, \infty]$, si existen $\delta > 0$ y M tal que $|x - a| < \delta$ implica que

$$|f(x)| \leq M\, |g(x)|, \tag{1.2}$$

en el caso de que $|a| < \infty$. Si $a \in \{-\infty, \infty\}$, entonces significa que existen N y M tales que $x \geq N$ implica (1.2).

Introduzcamos algo de notación que será útil en la demostración de varios resultados en este capítulo. Sea $A = a_1 a_2 \cdots a_k$ una cadena, con a_j b-dígito para cada $j = 1, \ldots, k$. Definimos la función $\boldsymbol{S^b_{A,n}}$ como

$$S^b_{A,n}(x) = \sum_{j=1}^{n-k+1} \mathbf{1}_{\left(d^b_j(x)=a_1\right)} \mathbf{1}_{\left(d^b_{j+1}(x)=a_2\right)} \cdots \mathbf{1}_{\left(d^b_{j+k-1}(x)=a_k\right)},$$

para cada $x \in \Omega$. $S^b_{A,n}(x)$ representa el número de veces que aparece la cadena $a_1 \ldots a_k$ en los primeros $n \in \mathbb{N}$ dígitos de la expansión $b-$ádica de x.

Demostración del Teorema 1.1. Primero veremos la equivalencia entre (i) y (ii).

Supongamos que x es normal en base b. Sean $A = a_1 a_2 \cdots a_k$ una cadena en base b y $a \in \left\{0, 1, \ldots, b^k - 1\right\}$ la cadena $a_1 a_2 \ldots a_k$ en base b^k, es decir, a es un b^k-dígito. Entonces $d^b_{kr+j+1}(x) = a_1,\ d^b_{kr+j+2}(x) = a_2, \ldots, d^b_{kr+j+k}(x) = a_k$ es equivalente a que a esté en el $(r-1)-$ésimo lugar de la expansión b^k-ádica de $\{b^j x\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{S^b_{A,nk}(x)}{nk} &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{S^{b^k}_{a,n}\left(\{b^j x\}\right)}{n} \\ &= \frac{1}{b^k}\left(1 + o(1)\right), \end{aligned}$$

pues $\{b^j x\}$ es simplemente normal en base b^k. Por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S^b_{A,n}(x)}{n} = \frac{1}{b^k},$$

es decir, se cumple (ii).

Supongamos ahora que cada cadena de longitud l ocurre con frecuencia $1/b^l$ en la representación en base b de x. Sea d un dígito en base b^r, para alguna $r > 1$. Queremos ver que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{S^{b^r}_{d,N}(x)}{N} = \frac{1}{b^r}.$$

Podemos escribir d como un bloque de r dígitos en base b, digamos $A = a_1 a_2 \ldots a_r$. Dadas dos cadenas de dígitos E, F en base b, tales que F tiene al menos tantos dígitos como E, escribamos $R_j(E, F)$ para representar el número de veces que E ocurre en F con el primer dígito de E en la posición $h \equiv j \,(\text{mód.}\, r)$ en F. Sea $\alpha(s,\varepsilon)$ el conjunto de todos los bloques D de s dígitos en base b tales que

$$\max_j \left| R_j(A,D) - \frac{s}{rb^r} \right| \geq \varepsilon s.$$

Por el Lema 1.1 con $l = \lfloor s/r \rfloor$, D reemplazado por D, $Db^{-1}, \ldots, Db^{-r+1}$ (donde Db^t indica que se omiten los últimos t dígitos de D), podemos concluir que α tiene a lo más εb^s elementos para cada s suficientemente grande, digamos, mayor a s_0. Fijemos $s = \max\{s_0, r\varepsilon^{-1}\}$.

Por hipótesis tenemos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S^b_{D,N}(x)}{N} = \frac{1}{b^s}.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \sum_{D\in\alpha} \frac{S^b_{D,N}(x)}{N} &= \sum_{D\in\alpha} \lim_{N\to\infty} \frac{S^b_{D,N}(x)}{N} \\ &\leq \varepsilon b^s \frac{1}{b^s} \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Escribamos D_t para el bloque de dígitos $d_t \ldots d_{t+s-1}$ en la expansión $b-$ádica de x.

Sea

$$T(N) = \{t : \ D_t \notin \alpha,\ t \leq N - s + 1\}.$$

Entonces $S(N)$ tiene a lo más $2\varepsilon N$ elementos si N es suficientemente grande, por (1.3). Suponga que N es múltiplo de r. Entonces,

$$\left| (s-r+1)\ S^{b^r}_{d,N/r}(x) - \sum_{t=1}^{N-s+1} R_{2-t}(A, D_t) \right| \leq 2s^2. \tag{1.4}$$

Esto se debe a que cada solución a

$$\begin{aligned} a_1 &= d_j, a_2 = d_{j+1}, \ldots, a_r = d_{j+r-1} \\ s &\leq j \leq N - j,\ j \equiv 1 \ (\text{mód. } r) \end{aligned}$$

contribuye exactamente $s - r + 1$ a ambas expresiones cuya diferencia se toma del lado izquierdo de la igualdad (1.4).

Para a lo más εN valores de $t \in S(N)$, usamos la cota

$$0 \leq R_j(A, D_t) \leq s - r + 1.$$

Para $t \notin S(N)$ tenemos que

$$\left| R_j(A, D_t) - \frac{s}{rb^r} \right| \leq \varepsilon s.$$

De aquí que, por (1.4),

$$\left| S_{d,N/r}^{b^r}(x) - \frac{N}{rb^r} \right| \leq 4\varepsilon N + \frac{2s^2}{s-r+1} + \frac{N}{rb^r}\left(\frac{s}{s-r+1} - 1 \right)$$

para cada N suficientemente grande. Por lo tanto x es simplemente normal en base b^r, para toda $r \geq 1$ y lo que queríamos demostrar es que x es normal en base b. Posteriormente (Proposición 1.4) veremos que estas dos condiciones son equivalentes.

Hasta el momento hemos demostrado que (i) y (ii) son equivalentes. A continuación mostramos la equivalencia entre (ii) y (iii).

Sea $(\{b^j x\})_j$ uniformemente distribuida en el intervalo unitario y sea $a_1 a_2 \ldots a_t$ cualquier cadena (de tamaño t). Por hipótesis tenemos que la frecuencia asintótica de $(\{b^j x\})_j$ en el intervalo

$$\left(.a_1 a_2 \ldots a_t,\ .a_1 a_2 \ldots a_t + 1/b^t \right)$$

es la longitud del intervalo, b^{-t}. Como $\{b^j x\}$ está dentro de este intervalo si, y sólo si, la primera $t-$cadena $\{b^j x\}$ es $a_1 \ldots a_t$, la frecuencia asintótica de esta $t-$cadena es también b^{-t}. Entonces x cumple (ii).

Por otro lado, supongamos que se cumple (ii). Cada cadena de longitud t ocurre con frecuencia $1/b^t$ en la representación $b-$ádica de x. Podemos dividir el intervalo Ω en b^m subintervalos de longitud b^{-m}. Cada $\{b^j x\}$ se encuentra en un intervalo determinado por su primera $t-$cadena, que es la misma que el $j-$ésimo bloque de x; por un argumento similar al del párrafo anterior, $\{b^j x\}$ ocurre en cada subintervalo con frecuencia b^{-t}.

Ahora consideremos un subintervalo arbitrario $(c, d] \subset \Omega$. Podemos aproximar $(c, d]$ por dentro con intervalos de longitud b^{-m} que estén totalmente contenidos en él. La frecuencia asintótica de $\{b^j x\}$ en cada uno de estos dos conjuntos de subintervalos es igual a la suma de las longitudes de los subintervalos y la frecuencia de la sucesión en $(c, d]$ está entre sus frecuencias en los dos conjuntos. Como podemos aproximar la longitud de $(c, d]$ tan cercano como queramos, haciendo m grande, la frecuencia asintótica en $(c, d]$ es $d - c$. De esta forma, x satisface (iii) y así hemos demostrado el teorema. ■

De la Definición 1.1 se obtienen directamente las contenciones del recuadro de abajo, sin embargo dar ejemplos de números normales en alguna base y números absolutamente normales no es trivial. De hecho, hasta donde sabemos, no se conoce ningún ejemplo explícito de número absolutamente normal.

$$\boxed{\text{Simplemente normales en base } b \quad \supseteq \quad \text{Normales en base } b \quad \supseteq \quad \text{Absolutamente normales}} \tag{1.5}$$

En la siguiente sección veremos que las contenciones del recuadro de arriba son propias y en la última sección veremos algunos ejemplos conocidos relevantes de números normales en alguna base.

1.2 Propiedades

En esta sección respondemos algunas preguntas naturales que surgen acerca de los números normales. Por ejemplo, ¿cuántos números satisfacen alguna clase de normalidad? ¿son numerables los números normales? ¿son densos? ¿qué hay con los números no normales? entre otras.

1.2.1 Probabilidad Segura, Densidad y no-Numerabilidad

El siguiente es un resultado clásico pionero sobre números simplemente normales. Recordemos que las variables aleatorias las definimos sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con $\Omega = (0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathfrak{B}((0, 1])$ y $\mathbb{P} = \lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue.

Teorema 1.2 Sea b una base. Casi todo número es simplemente normal en base b. Es decir, para cada $b-$dígito a,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a,n}}}{n}=\frac{1}{b}\right)=1.$$

Demostración. Sean b una base y a un b-dígito. Por el Corolario 1.1, $S^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a,n}}$ tiene distribución Binomial(n, b^{-1}). Entonces $\mathbb{E}\left(S^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a,n}}\right)=nb^{-1}$ y la Ley Fuerte de Grandes Números nos dice que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a,n}}}{n}\underset{n\to\infty}{=}\frac{1}{b}\right)=1.$$

■

El Teorema 1.2 nos dice que un número x es simplemente normal en base b si, y sólo si, se encuentra en el soporte de la Ley Fuerte de Grandes Números, o bien, que la probabilidad de escoger un número que sea simplemente normal en alguna base es 1. El trabajo de Borel acerca de números normales [8] data de 1909, 24 años antes de que la Ley Fuerte de Grandes Números fuera establecida en su forma definitiva en el Capítulo VI de los Fundamentos de Probabilidad de Kolmogorov [18]. Lo que hizo Borel fue demostrar un caso particular de la Ley Fuerte de Grandes Números, el cual es conocido como Teorema de Números Normales de Borel.

Corolario 1.2 Sea b una base. Casi todo número es normal en base b, con respecto a la medida de Lebesgue.

Recordemos que $A\in\mathcal{F}$ es nulo si $\mathbb{P}(A)=0$. Además que la unión numerable de conjuntos nulos es nula.

Demostración. Sean b una base, $i\geq 0$ y $j\geq 1$. Denotemos por $A_{i,j}$ al conjunto

$$A_{ij}=\left\{x\in\Omega:\ \left\{b^ix\right\}\text{ es simplemente normal en base }b^j\right\}.$$

Tenemos que $A^c_{i,j}$ es nulo, pues se cumple que

$$\left\{\left\{b^ix\right\}:\ x\in\Omega\right\}=\Omega$$

y entonces así aplicamos el Teorema 1.2 con la base b^i.

De lo anterior, el conjunto de números no normales en base b,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=0}^{\infty} A_{i,j}^{c},$$

es nulo, pues es unión numerable de conjuntos nulos. ■

Corolario 1.3 Casi todo número es absolutamente normal.

Demostración. Se sigue de que, por el Corolario 1.2, el conjunto de números que no son absolutamente normales es unión numerable de conjuntos nulos. ■

Proposición 1.2 *Sea b una base. Los números simplemente normales en base b, los normales en base b y los absolutamente normales y sus complementos son, cada uno, densos y no-numerables en Ω.*

Demostración. Para cualquier tipo de normalidad, es decir, para números simplemente normales en alguna base, números normales en alguna base y números absolutamente normales, se siguen inmediatamente ambas propiedades del hecho de que el conjunto de números que las satisfacen tienen probabilidad uno.

Demostraremos ahora que los números que no son simplemente normales en base dos son densos y no numerables. Para una base cualquiera, la prueba es análoga.

Las propiedades de densidad y no numerabilidad para números normales en base b y números absolutamente normales, se siguen de que son conjuntos que contienen a los números no normales en base b (basta tomar los complementos en (1.5)).

Sea N el conjunto de los números simplemente normales en base dos. Vamos a demostrar que el conjunto de números no normales es no-numerable. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in \Omega : \; x = 0.11a_1 11a_2 11a_3 \ldots_2 \text{ tal que } a_i \in \{0,1\}, \forall a_i\}.$$

Notemos que $A \subset N^c$, pues si $x = 0.11a_1 11a_2 11a_3 \ldots_2 \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+1+a_1+1+1+a_2+1+1+a_3+\cdots+d_n(x)}{n}$$

$$\begin{aligned} &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1+1+0+1+1+0+1+1+0+\cdots+d_n(x)}{n} \\ &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

entonces $x \notin N$.

Ahora, A es biyectable con $\{0,1\}^{\infty} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots$, que es no-numerable. Entonces N^c contiene un subconjunto no-numerable y por tanto es no-numerable.

Ahora demostramos la densidad en Ω de los números no-normales. Sean $x = 0.x_1x_2\ldots_2$, $y = 0.y_1y_2\ldots_2 \in \Omega$ con $x < y$. Sea $k \geq 0$ tal que $x_j = y_j$ si $j \leq k$ y $x_j \neq y_j$ si $j > k$ (observemos que esto implica que $x_{k+1} = 0$ y $y_{k+1} = 1$). Entonces el número

$$z = 0.x_1\ldots x_k x_{k+1} 0\bar{1}_2$$

es no-normal y además $x \leq z \leq y$. Por lo tanto N^c es denso en Ω. Con esto la demostración está completa. ■

1.2.2 Cambios de base

A continuación se presentan otras propiedades de los números normales relacionados con cambios de bases. Seguimos la demostración de los Teoremas 1.1 y 1.2 del libro de Harman [14] para los siguientes tres resultados.

Proposición 1.3 *Sea $x \in \Omega$ simplemente normal en base b^n, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces x es simplemente normal en base b.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x \in \Omega$ es simplemente normal en base b^n. Por hipótesis tenemos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S^{b^n}_{d,N}(x)}{N} = \frac{1}{b^n},$$

para todo b^n-dígito d.

Observemos que cada dígito $d \in \{0,1,\ldots,b^n-1\}$ puede escribirse de forma única como

$$d = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(d)\, b^j, \quad \text{con } 0 \leq c_j \leq b-1.$$

Supongamos que

$$x = 0.a_1 a_2 \ldots_b = 0.d_1 d_2 \ldots_{b^n}$$

son las expansiones $b-$ádica y b^n-ádica de x.

Sea a un $b-$dígito. Entonces a ocurre k veces entre los dígitos a_m, con

$$tn + 1 \leq m \leq (t+1)\, n$$

si, y sólo si, la ecuación

$$c_j\,(d_t) = a, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

tiene precisamente k soluciones. Sea

$$D\,(k) = \{d \in \{0, 1, \ldots, b^n - 1\} : \; c_j\,(d) = a \text{ tiene } k \text{ soluciones}\}\,.$$

Dado que la cardinalidad de $D\,(k)$ es $\binom{n}{k}(b-1)^{n-k}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{S^b_{a,Nn}\,(x)}{N} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \sum_{d\in D(k)} \frac{S^{b^n}_{d,N}\,(x)}{N} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \sum_{d\in D(k)} \lim_{N\to\infty} \frac{S^{b^n}_{d,N}\,(x)}{N} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} (b-1)^{n-k} \lim_{N\to\infty} \frac{S^{b^n}_{d,N}\,(x)}{N} \\
&= \frac{1}{b^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} (b-1)^{n-k} \\
&= \frac{1}{b^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (b-1)^{n-k} \\
&= \frac{1}{b^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (b-1)^{n-k-1} \\
&= \frac{1}{b},
\end{aligned}$$

en donde el teorema del binomio justifica la última igualdad. Ahora, como

$$S^b_{a,N+r}\,(x) - S^b_{a,N}\,(x) < r, \; \forall r \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\left|\frac{S^b_{a,N}(x)}{N}-\frac{1}{b}\right| &= \lim_{N\to\infty}\left|\frac{S^b_{a,N}(x)-S^b_{a,n\lfloor N/n\rfloor}(x)}{N}+\frac{S^b_{a,n\lfloor N/n\rfloor}(x)}{N}-\frac{1}{b}\right| \\
&\leq \lim_{N\to\infty}\left(\left|\frac{S^b_{a,N}(x)-S^b_{a,n\lfloor N/n\rfloor}(x)}{N}\right|+\left|\frac{S^b_{a,n\lfloor N/n\rfloor}(x)}{N}-\frac{1}{b}\right|\right) \\
&\leq \lim_{N\to\infty}\left(\frac{n}{N}+\left|\frac{S^b_{a,n\lfloor N/n\rfloor}(x)}{N}-\frac{1}{b}\right|\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S^b_{a,N}(x)}{N}=\frac{1}{b},$$

es decir, x es simplemente normal en base b. ■

El recíproco de la implicación de la Proposición 1.3 no es cierto, es decir, existe un número simplemente normal en alguna base b, que no es simplemente normal en base b^n, para alguna $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Para ver esto, consideremos

$$x=0.010\,1\overline{01}_2,$$

que es simplemente normal en base 2, pero no lo es en base 2^2, pues su expansión en base 2^2 es

$$x=0.11\overline{1}_4.$$

Corolario 1.4 *Sea $n\in\mathbb{N}$. El número $x\in\Omega$ es simplemente normal en base b^{nk}, para todo $k\in\mathbb{N}$ si, y sólo si, x es simplemente normal en base b^k, para todo $k\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Si x es simplemente normal en base b^{nk}, entonces es simplemente normal en base b^k por la Proposición 1.3, para todo k.

Por otro lado, si x es simplemente normal en base b^k, para cada $k\in\mathbb{N}$, entonces es simplemente normal en base b^{nk}, para todos $n,k\in\mathbb{N}$, pues $nk\in\mathbb{N}$. ■

En la Definición 1.1 se dijo que x es normal en base b si $\left\{b^k x\right\}$ es simplemente normal en base b^j, para cada $k\geq 0$ y $j\geq 1$. De esta forma, la siguiente proposición nos da otra manera más sencilla de definir un número normal en alguna base.

Proposición 1.4 *El número $x \in \Omega$ es normal en base b si, y sólo si, para cada $j \geq 1$, x es simplemente normal en base b^j.*

Demostración. Si x es normal en base b, $\{b^j x\}$ es simplemente normal en base b^k, para todos $k \in \mathbb{N}$ y $j \geq 0$. Entonces $\{b^{nj}x\}$ es simplemente normal en base b^{nk}, para todos $n, k \in \mathbb{N}$ y $j \geq 0$, pues $nk \in \mathbb{N}$ y $nj \in \mathbb{Z}_+$. Por tanto x es normal en base b^n, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, si x es normal en base b, por inducción basta demostrar que $\{bx\}$ es simplemente normal en base b^k, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como

$$\left| S^b_{d,N}\left(\{bx\}\right) - S^b_{d,N}\left(x\right)\right| \leq 1,$$

es fácil ver que $\{bx\}$ es simplemente normal en base b. Demostraremos que $\{bx\}$ es simplemente normal en base b^j, $j \geq 2$, usando que x es simplemente normal en base b^{jr}, para cualquier $r \in \mathbb{N}$, por el Corolario 1.4.

Ahora, sea a un dígito en base b^j y $r \in \mathbb{Z}_+$. Dado $d \in \{0, 1, \ldots, b^{jr} - 1\}$, definamos $g_m(d)$ como

$$bd - \left\lfloor db^{1-jr}\right\rfloor b^{jr} = \sum_{m=0}^{r-1} b^{mj} g_m, \quad 0 \leq g_m < b^j.$$

Observemos que $bd - \left\lfloor db^{1-jr}\right\rfloor b^{jr}$ es el residuo de dividir bd entre b^{jr}.

Definamos $D(k)$ como

$$D(k) = \left\{d \in \left\{0, 1, \ldots, b^{jr} - 1\right\} : \ g_m = a \text{ tiene } k \text{ soluciones, para } m = 1, \ldots, r-1\right\}.$$

La cardinalidad de $D(k)$ es

$$\binom{r-1}{k} b^j \left(b^j - 1\right)^{r-k-1}.$$

Se sigue de la definición de $D(k)$ que

$$S^{b^j}_{a,Nr}\left(\{bx\}\right) \geq \sum_{k=0}^{r-1} k \sum_{d \in D(k)} S^{b^{jr}}_{d,N}(x).$$

De aquí que, como x es simplemente normal en base b^{jr},

$$\begin{aligned}
\liminf_{N\to\infty} \frac{S^{b^j}_{a,Nr}\left(\{bx\}\right)}{Nr} &\geq \sum_{k=0}^{r-1} \frac{k}{r}\binom{r-1}{k} b^j \left(b^j-1\right)^{r-k-1} \lim_{N\to\infty} \frac{S^{b^{jr}}_{d,N}\left(x\right)}{N} \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{k}{r}\binom{r-1}{k} b^j \left(b^j-1\right)^{r-k-1} \frac{1}{b^{jr}} \\
&= \sum_{l=0}^{r-2} \frac{l+1}{r}\binom{r-1}{l+1} b^j \left(b^j-1\right)^{r-l-2} \frac{1}{b^{jr}} \\
&= \sum_{l=0}^{r-2} \frac{r-1}{r}\binom{r-2}{l} b^j \left(b^j-1\right)^{r-l-2} \frac{1}{b^{jr}} \\
&= \frac{r-1}{r} b^j b^{jr-2j} \frac{1}{b^{jr}} \\
&= \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{b^j}.
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{S^{b^j}_{a,N}\left(\{bx\}\right)}{N} \geq \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{b^j}. \tag{1.6}$$

Como esto se cumple para cada dígito a y

$$\sum_{a=0}^{b^j-1} \frac{S^{b^j}_{a,N}}{N} = 1,$$

entonces también tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \frac{S^{b^j}_{a,N}\left(\{bx\}\right)}{N} &= \limsup_{N\to\infty} \left(1 - \sum_{a_0=0, a_0\neq a}^{b^j-1} \frac{S^{b^j}_{a_0,N}}{N}\right) \\
&= 1 - \sum_{a_0=0, a_0\neq a}^{b^j-1} \liminf_{N\to\infty} \frac{S^{b^j}_{a_0,N}}{N} \\
&\leq 1 - \left(b^j-1\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{b^j} \\
&= \frac{1}{b^j}\left(1+\frac{b^j-1}{r}\right).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Como (1.6) y (1.7) se cumplen para r arbitrariamente grande, concluimos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S^{b^j}_{a,N}\left(\{bx\}\right)}{N} = \frac{1}{b^k}, \quad \text{para } a \in \left\{0, 1, \ldots, b^j-1\right\}.$$

De esta forma hemos demostrado la proposición. ■

El siguiente corolario proporciona otra equivalencia más de normalidad, nos dice que x es normal en base b si, y sólo si, x es normal en todas las potencias de b.

Corolario 1.5 *Sea $n \in \mathbb{N}$. El número $x \in \Omega$ es normal en base b si, y sólo si, x es normal en base b^n.*

Demostración. Sea $x \in \Omega$ normal en base b^n, es decir, x es simplemente normal en base b^{nj}, para toda j, por la Proposición 1.4. Por el Corolario 1.4, esto es equivalente a que x sea simplemente normal en base b^j, para toda j. Es decir, que x sea normal en base b, por la Proposición 1.4. ■

Los siguientes dos resultados los enunciamos sin demostración (y no los usaremos en el resto de este trabajo). El primero fue demostrado por Wall [28] en su trabajo de tesis doctoral en 1949. El segundo resultado lo obtuvo Schmidt [26] en 1960.

Proposición 1.5 *Si x es normal en base b y $q \in \mathbb{Q}$, entonces $\{qx\}$ es normal en base b.*

Proposición 1.6 *Sean b_1 y b_2 dos bases. Decimos que $b_1 \sim b_2$ si existen $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $b_1^r = b_2^s$.*

(i) Si $b_1 \sim b_2$, entonces x normal en base b_1 implica que es normal en base b_2.

(ii) Si $b_1 \nsim b_2$, el conjunto de los números normales en base b_1 que no son siquiera simplemente normales en base b_2 tiene la cardinalidad del continuo, $2^{\mathbb{N}}$.

Observemos que el Corolario 1.5 es equivalente a la Proposición 1.6(i). La diferencia es que está escrito en términos de la clase de equivalencia que allí definimos. De esta forma queda más clara la Proposición 1.6(ii).

1.3 Ejemplos y Contrajemplos

Dar ejemplos de números simplemente normales es fácil, por ejemplo

$$0.110100\overline{10}_2 \quad \text{y} \quad 0.\overline{0123}_4$$

son simplemente normales en las bases 2 y 4, respectivamente. Dar ejemplos de números normales para alguna base no es tan sencillo. En 1917, Sierpinski [27] da el primer ejemplo de número absolutamente normal mediante un algoritmo, veinte años antes de que se formalizara el concepto de computabilidad. El algoritmo de Sierpinski usa una construcción de infinitos conjuntos de intervalos y usa el mínimo de un conjunto no numerable. El defecto de este algoritmo es que es de orden exponencial con respecto al número de dígitos, lo que lo hace poco práctico. Champernowne [10] dio en 1933 el primer ejemplo explícito de número normal en alguna base[2], y el cual presentamos en la siguiente sección. Hasta donde sabemos, no existe aún un ejemplo similar para un número absolutamente normal.

Existe también la conjetura de que varias constantes conocidas como e, π, $\log 2$, $\zeta(3)$, etcétera, son normales, sin embargo no se ha podido demostrar siquiera que alguna de estas constantes tenga sus dígitos en la misma proporción para alguna base. Bailey y Crandall [2] y [3] demuestran que éstas y otras constantes son normales en ciertas bases bajo el supuesto de una hipótesis muy general.

Puede verse también que existen números que son simplemente normales en una base, pero no en otra, por ejemplo, $0.01\overline{01}_2$ es simplemente normal en base dos, pero no lo es en base 4, pues su expansión 4-ádica es $0.111\bar{1}_4$.

1.3.1 Número de Champernowne

Los siguientes tres ejemplos los encontró Champernowne en su artículo de 1933.

[2] David Champernowne fue un economista inglés. Este ejemplo lo encontró cuando era un alumno de licenciatura.

Ejemplo 1.1 La concatenación de los números compuestos,

$$0.4\,6\,8\,9\,10\,12\,14\,15\,\ldots,$$

es normal en base diez.

Ejemplo 1.2 Si a es cualquier número positivo, entonces el número

$$0.\lfloor 1a\rfloor\,\lfloor 2a\rfloor\,\lfloor 3a\rfloor\ldots$$

es normal en base diez. Un ejemplo de esto es la concatenación de los múltiplos de tres (tomando $a = 3$), $0.3\,6\,9\,12\,15\ldots$

Ejemplo 1.3 El número

$$0.\lfloor 1\log 1\rfloor\,\lfloor 2\log 2\rfloor\,\lfloor 3\log 3\rfloor\ldots$$

es normal en base diez.

Cabe mencionar que los ejemplos anteriores son normales en base diez (y por el Corolario 1.4 en todas las potencias de diez), mas nada se sabe acerca de si son normales en alguna otra base.

El siguiente ejemplo, para $b = 10$, es el más conocido de número normal en alguna base. La demostración de la generalización a cualquier base es análoga a la demostración en base diez que Champernowne presenta en su artículo, que es la que presentamos a continuación.

Ejemplo 1.4 El número de Champernowne, $0.1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\ldots$, es normal en base 10. De forma más general, si $\left(n_j^b\right)_{j\in\mathbb{N}}$ son los números naturales (en orden creciente) en base b, entonces el número de Champernowne en base b, $0.n_1^b n_2^b\ldots_b$, es normal en base b.

Los ejemplos de Champernowne son resultado de las siguientes proposiciones.

Proposición 1.7 *Si γ_r denota la cadena*

$$\gamma_r = 0\ldots0\;0\ldots1\;0\ldots2\;\ldots\;9\ldots9,$$

con cada bloque de longitud r, entonces

$$0.\gamma_1\gamma_2\ldots$$

es normal en base diez.

Proposición 1.8 *Si γ_r es como arriba y $\gamma_{r,\mu}$ es la cadena formada repitiendo μ veces γ_r, entonces*

$$0.\gamma_{1,\mu}\,\gamma_{2,\mu}\ldots$$

es normal en base diez.

Proposición 1.9 *El número*

$$0.\gamma_{1,1}\,\gamma_{2,2}\ldots$$

es normal en base diez.

A continuación presentamos la demostración de estas proposiciones siguiendo de manera muy cercana los argumentos de Champernowne, para ello introducimos la siguiente notación:

Sea D_ρ una cadena (en base 10) de longitud ρ. Entonces

Γ y Γ_r denotarán, respectivamente, las cadenas $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$ y $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_r$;

L_r y l_r denotarán, respectivamente, el número de dígitos en Γ_r y γ_r.

Demostración de la Proposición 1.7. Hemos definido γ_r para que consista de 10^r miembros de r dígitos cada uno; será conveniente poner comas entre miembros consecutivos de $.\Gamma$. Así

$$\gamma_1 = 0, 1, \ldots, 9; \quad .\Gamma = 0, 1, 9, 00, 01, \ldots,$$

de manera que $.\Gamma$ tiene una sucesión infinita de comas.

Consideremos una ocurrencia individual de D_ρ en la sucesión. Si D_ρ ocurre con una coma entre dos de sus dígitos, entonces decimos que D_ρ ocurre dividida; si no hay coma que lo separe, decimos que ocurre no-dividida. Así, 37 ocurre en γ_2, no-dividido en $\ldots, 36, 37, 38, \ldots$ y dividido en $\ldots, 72, 73, 74, \ldots$

$$\begin{aligned} &\text{Si } r < \rho,\ D_\rho \text{ no puede ocurrir no dividida en } \gamma_r\text{; pero si } r \geq \rho, \\ &D_\rho \text{ ocurre no dividida en } \gamma_r \text{ exactamente } (r-\rho+1)\,10^{r-\rho} \text{ veces.} \end{aligned} \tag{1.8}$$

La afirmación para $r < \rho$ es obvia. Si $r \geq \rho$, hay $r-\rho+1$ posiciones en las cuales D_ρ podría aparecer no-dividida dentro de un miembro de γ_r, como el primer dígito de D_ρ podría ocurrir como cualquiera de los primeros $r-\rho+1$ dígitos del miembro de γ_r (así, $37\ldots 37\ldots 37$). Una vez determinada la posición, podríamos elegir los restantes $r-\rho$ dígitos del miembro de $10^{r-\rho}$ formas distintas. Así D_ρ ocurrirá en una posición dada en $10^{r-\rho}$ miembros distintos de γ_r. De aquí que D_ρ ocurrirá no-dividida en γ_r exactamente $(r-\rho+1)\,10^{r-\rho}$ veces. Por ejemplo, 37 ocurre no-dividido en γ_3 veinte veces, a decir, diez veces en la primera posición $\ldots, 370, 371, \ldots, 378, 379, \ldots$ y diez veces en la segunda posición

$$\ldots, 037, \ldots, 137, \ldots, 837, \ldots, 937, \ldots$$

Adicionalmente, $.\gamma_r$ no contiene más de 10^r comas y D_ρ no puede ocurrir dividida por cualquier coma dada tantas veces como ρ veces. De aquí que

$$D_\rho \text{ no puede ocurrir dividida en } \gamma_r \text{ más de } \rho 10^r \text{ veces.} \tag{1.9}$$

Sea h_r es el tamaño de la cadena γ_r. Por (1.8) y (1.9),

$$S^{10}_{D_\rho,h_r}(.\gamma_r) = (r-\rho+1)\,10^{r-\rho} + O\left(10^r\right) \qquad (\text{cuando } r \to \infty)\,.$$

Como $l_r = r10^r$; entonces

$$S^{10}_{D_\rho,h_r}(.\gamma_r) = \frac{l_r}{10^\rho} + o\left(l_r\right). \tag{1.10}$$

De aquí que,

$$\lim_{k\to\infty} S^{10}_{D_\rho,k}(.\Gamma_r) = \sum_{s=1}^{r} S^{10}_{D_p,|\gamma_s|}(.\gamma_s) + O\left(r\right), \quad L_r = \sum_{s=1}^{r} l_s,$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty} S^{10}_{D_\rho,k}(.\Gamma_r) = \frac{L_r}{10^\rho} + o\left(L_r\right). \tag{1.11}$$

Para estimar $S^{10}_{D_r,l}(.\gamma_r)$ consideramos que tan frecuentemente puede ocurrir no-dividida D_ρ en cada posición, en los primeros l dígitos de γ_r.

Supongamos que el $l-$ésimo dígito de γ_r ocurre en el miembro $p_{r-1}p_{r-2}\dots p_1p_0$ de γ_r, entonces tenemos que

$$l = r\sum_{t=0}^{r-1} p_t 10^t + \theta r \quad (0 < \theta \leq 1)\,. \tag{1.12}$$

Ahora denotemos por $S^{10}_{D_\rho,l,k}\left(.\gamma_r\right)$ al número de veces que D_ρ ocurre no-dividida en los primeros l dígitos de γ_r, con el primer dígito de D_ρ como el $k-$ésimo dígito de un miembro de γ_r. Entonces, si $k > r - \rho + 1$,

$$S^{10}_{D_\rho,l,k}\left(.\gamma_r\right) = 0, \tag{1.13}$$

y si $k \leq r - \rho + 1$,

$$S^{10}_{D_\rho,l,k}\left(.\gamma_r\right) = 10^{r-\rho-k+1}\left(\sum_{t=r-k+1}^{r-1} p_t 10^{t+k-r-1} + \theta'\right) \quad (0 \leq \theta' \leq 1)\,.$$

Podemos elegir, con D_ρ fijo en el miembro, los últimos $r - \rho - k + 1$ dígitos del miembro de $10^{r-\rho-k+1}$ formas. Habiendo elegido éste, para garantizar que el miembro esté como requerimos en la sucesión

$$00\dots 0,\ 00\dots 1,\ p_{r-1}\dots p_\lambda$$

que consiste de los primeros l dígitos de γ_r, podremos elegir los primeros $k - 1$ dígitos del miembro, ya sea de

$$\sum_{t=r-k+1}^{r-1} p_t 10^{t+k-r-1}$$

formas, o de

$$\sum_{t=r-k+1}^{r-1} p_t 10^{t+k-r-1} + 1$$

formas, de manera que el número total de veces que D_ρ pudiera ocurrir en la $k-$ésima posición no-dividida, en los primeros l dígitos de γ_r, está correctamente estimado por (1.13).

Un ejemplo numérico es el siguiente: 37 ocurrirá en la segunda posición ($k = 2$) en los primeros 7987 dígitos de γ_4 (es decir, en 0000, 0001, …, 1995, 199.) exactamente veinte veces ($= 10\,(1+1)$ veces), cuando hemos elegido los últimos dígitos (digamos 8), tenemos dos elecciones 1 ó 0 para el primer dígito; pero, si hubiéramos considerado los primeros

5 000 dígitos sólo de γ_4 (es decir, 0000, 0001, ..., 1 249.), ya no podríamos escoger 1 como nuestro primer dígito, y 37 ocurriría sólo diez veces en la segunda posición (a saber de 0370, 0371, ..., 0379) en los primeros 5 000 dígitos de γ_4.

Por (1.13) tenemos que

$$S^{10}_{D_\rho,l,k}\left(.\gamma_r\right) = \frac{1}{10^\rho}\left(\sum_{t=r-k+1}^{r-1} p_t 10^t + \theta' 10^{r-k+1}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r-\rho+1} S^{10}_{D_\rho,l,k}\left(.\gamma_r\right) &= \frac{1}{10^\rho}\left(\sum_{k=1}^{r-\rho+1}\sum_{t=r-k+1}^{r-1} p_t 10^t\right) + O\left(10^r\right) \\ &= \frac{1}{10^\rho}\sum_{k=1}^{r-\rho+1}\left[\left(t+1-\rho\right) p_t 10^t\right] + O\left(10^r\right).\end{aligned} \tag{1.14}$$

Ahora, D_ρ no puede ocurrir dividida en γ_r más de $\rho 10^r$ veces; de aquí que, por (1.12) y (1.14),

$$S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\gamma_r\right) = 10^{-\rho} l + O\left(10^r\right) = 10^{-\rho} l + o\left(l_r\right) \tag{1.15}$$

cuando $r \to \infty$ y l varía de cualquier manera consistente con la existencia de $S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\gamma_r\right)$.

Para obtener $S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\Gamma\right)$ de (1.10), (1.11) y (1.15) suponemos que el $l-$ésimo dígito de Γ ocurre como el $m-$ésimo dígito de γ_r. Entonces

$$l = L_{r-1} + m;\ S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\Gamma\right) = \lim_{k\to\infty} S^{10}_{D_\rho,k}\left(.\Gamma_{r-1}\right) + S^{10}_{D_\rho,m}\left(.\gamma_r\right) + O\left(1\right) \quad \text{(cuando } l \to \infty\text{)}.$$

De aquí que, por (1.10), (1.11) y (1.15),

$$S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\Gamma\right) = 10^{-\rho} L_{r-1} + 10^{-\rho} m + O\left(10^r\right),$$

entonces

$$S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\Gamma\right) = 10^{-\rho} l + o\left(l\right),$$

y $.\Gamma$ es normal en base diez. Esto demuestra la Proposición 1.7. ■

Demostración de la Proposición 1.8. Usamos la siguiente notación adicional:

$\Gamma_{r,\mu}$ denotará la cadena $\gamma_{1,\mu}\,\gamma_{2,\mu}\,\ldots\gamma_{r,\mu}$;

Γ_μ denotará la cadena $\gamma_{1,\mu}\,\gamma_{2,\mu}\,\gamma_{3,\mu}\ldots$;

$L_{r,\mu}$ y $l_{r,\mu}$ serán el número de dígitos en $\Gamma_{r,\mu}$ y $\gamma_{r,\mu}$, respectivamente;

$H_{r,\mu}$ y $h_{r,\mu}$ serán el tamaño de las cadenas $\Gamma_{r,\mu}$ y $\gamma_{r,\mu}$, respectivamente;

Para estimar $S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\Gamma_\mu\right)$ suponemos, como en las primeras líneas de la Proposición 1.7, que el $l-$ésimo dígito de Γ_μ ocurre como el $m-$ésimo dígito de $\gamma_{r,\mu}$; podemos suponer además que el m-ésimo dígito de $\gamma_{r,\mu}$ ocurre como el $q-$ésimo dígito de algún γ_r de $\gamma_{r,\mu}$ tal que

$$l = L_{r-1,\mu} + m = L_{r-1,\mu} + sl_r + q \quad \left(0 \leq s < \mu,\ 0 < q \leq l_r\right). \tag{1.16}$$

También, cuando $l \to \infty$,

$$\lim_{j\to\infty} S^{10}_{D_\rho,j}\left(.\Gamma_\mu\right) = S^{10}_{D_\rho,H_{r-1,\mu}}\left(.\Gamma_{r-1,\mu}\right) + sS^{10}_{D_\rho,h_r}\left(.\gamma_r\right) + S^{10}_{D_\rho,q}\left(.\gamma_r\right) g_r\left(z\right) + O\left(r\right). \tag{1.17}$$

De aquí que, por (1.10), (1.11) y (1.15),

$$S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\Gamma_\mu\right) = 10^{-\rho}\left(L_{r-1,\mu} + sl_r + q\right) + o\left(l\right);$$

de donde, por (1.16),

$$S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\Gamma_\mu\right) = 10^{-\rho} l + o\left(l\right).$$

Esto demuestra la Proposición 1.8. ■

Demostración de la Proposición 1.9. Usamos la siguiente notación adicional:

$\gamma_{r,r}$ denotará la cadena γ_r repetida r veces;

$\Gamma_{r,r}$ denotará la cadena $\gamma_{1,1}\,\gamma_{2,2}\,\ldots\gamma_{r,r}$;

Δ_r denotará la cadena $\gamma_{1,r}\,\gamma_{2,r}\,\gamma_{3,r}\ldots$;

$L_{r,r}$ y $l_{r,r}$ serán el número de dígitos en $\Gamma_{r,r}$ y $\gamma_{r,r}$, respectivamente;

$H_{r,r}$ y h_{rr} serán tamaño de $\Gamma_{r,r}$ y $\gamma_{r,r}$, respectivamente;

Podemos expresar cualquier entero positivo l de la forma

$$l = L_{r-1,r-1} + sl_r + m = \left(r-1\right) L_{r-1} + sl_r + m, \tag{1.18}$$

donde $0 \leq s < r, 0 < m \leq l_r = o\left(l\right)$, cuando $l \to \infty$. También

$$\begin{aligned} S^{10}_{D_\rho,l}\left(.\Delta_r\right) &= S^{10}_{D_\rho,H_{r-1,r-1}}\left(.\Gamma_{r-1,r-1}\right) + sS^{10}_{D_\rho,h_r}\left(.\gamma_r\right) + Y' \\ &= \left(r-1\right) \lim_{k\to\infty} S^{10}_{D_\rho,k}\left(.\Gamma_{r-1}\right) + sS^{10}_{D_\rho,h_r}\left(.\gamma_r\right) + Y, \end{aligned}$$

donde $Y = O(l_r) = o(l)$, cuando $l \to \infty$. De aquí que, por (1.10) y (1.11),

$$_rG(x) = 10^{-\rho}\left[(r-1)X_{r-1} + qx_r\right] + o(x),$$

entonces, por (1.18),

$$S^{10}_{D_\rho,l}(.\Delta_r) = 10^{-\rho}l + o(l),$$

y el número $.\Delta_r$ es normal en base diez. ■

Demostración de la normalidad del número de Champernowne. Para probar este resultado, usamos un caso particular de la Proposición 1.8, que el número $.\Gamma_9$ es normal en base diez.

Mostramos que si insertamos un dígito extra después de cada coma en $.\Gamma_9$, el nuevo número $.\Gamma_9'$ también es normal en base diez. Así, sea r el número de dígitos en el miembro de Γ_9 en el cual el l-ésimo dígito de Γ_9 ocurre y sea $C(l)$ el número de comas entre los primeros l dígitos de Γ_9. Entonces, como $r10^r = O(l)$ cuando $l \to \infty$,

$$C(l) = O(10^r) = o(l).$$

Si el $l-$ésimo dígito de Γ_9 se convierte en el $l'-$ésimo dígito de Γ_9', entonces l está definido como una función del entero positivo l' excepto en los casos donde el $l'-$ésimo dígito de Γ_9' es uno de los nuevos dígitos. En este caso, definimos el correspondiente valor de l como el mismo correspondiente a $l'-1$. Entonces

$$l' = l + C(l) + O(1) = l + o(l).$$

Nuevamente la inserción de un nuevo dígito en Γ_9 no puede alterar $S^{10}_{D_\rho,l}(.\Gamma_9)$ por más de ρ. De aquí que si $\left(S^{10}_{D_\rho,l}(.\Gamma_9')\right)'$ denota el número de ocurrencias de D_ρ en los primeros l' dígitos de Γ_9',

$$\left(S^{10}_{D_\rho,l}(.\Gamma_9')\right)' = S^{10}_{D_\rho,l}(.\Gamma_9) + O(C(l)) = 10^{-\rho}l + o(l) = 10^{-\rho}l' + o(l'),$$

y así $.\Gamma_9'$ es normal en base diez.

Bajo una elección adecuada de los nuevos dígitos, podemos hacer que $.\Gamma'_9$ sea el número

$$0.10, 11, \ldots, 19, 20, \ldots, 99, 100, \ldots$$

Por tanto, este número es normal en base diez. Consecuentemente el número de Champernowne es normal en base diez. ■

Por una extensión de métodos similares es posible demostrar que los Ejemplos 1.1, 1.2 y 1.3 son normales en base diez.

1.3.2 Usando Números Primos y Primos Relativos

Champernowne [10] también conjeturó que la concatenación de los números primos es normal en base diez, pero esto no fue demostrado sino hasta 1946 por Copeland y Erdös [11]. La demostración tanto de este ejemplo como del siguiente podemos encontrarlas en los artículos a los que hacemos mención.

Ejemplo 1.5 La **constante de Copeland-Erdös**,

$$0.2\,3\,5\,7\,11\,13\ldots,$$

obtenida por la concatenación de los números primos, es normal en base diez.

Actualmente existen muchos números conocidos normales para cualquier base b, como vemos a continuación.

Ejemplo 1.6 (Números de Stoneham generalizados) Sean b y c primos relativos mayores a 1, entonces el número

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c^j b^{c^j}} \tag{1.19}$$

es normal en base b. Esta clase de números fue propuesta por Bailey y Crandall [2] en 2001. Los números de Stoneham son los que tienen la forma de (1.19), pero con c impar y b raíz primitiva[3] de c^2, que R. G. Stoneham demostró que son normales en base b en 1973.

[3] Decimos que g es raíz primitiva de n si para cada entero a primo relativo con g, existe un entero k tal que $g^k \equiv a \pmod{\mathrm{n}}$.

1.3.3 Racionales y el Conjunto de Cantor

Ejemplo 1.7 (Los números racionales no son normales en ninguna base) Si juntamos todos los dígitos de la base b y repetimos esta cadena infinitas veces, entonces ese número ha de ser simplemente normal en base b. Por ejemplo, $0.010\,1\overline{01}$ y $0.210\,\overline{210}$ son simplemente normales en bases 2 y 3, respectivamente. Ahora veremos que los números racionales no son normales en ninguna base (aunque sí pueden ser simplemente normales en alguna base). Sea b una base y $x \in \Omega$ un número racional Supongamos que x es simplemente normal en base b, entonces los dígitos de x en base b se repiten a partir del $(m+1)-$ésimo dígito en bloques de l dígitos, para algunos enteros no negativos m y l. De esta forma el número

$$\{b^m x\} = d_1^{b^l}\left(\{b^m x\}\right) d_2^{b^l}\left(\{b^m x\}\right) d_3^{b^l}\left(\{b^m x\}\right) \ldots_{b^l}$$

no es simplemente normal en base b^l, pues $d_j^{b^l}\left(\{b^m x\}\right) = a,\ \forall j \in \mathbb{N}$, para algún b^l-dígito a. Esto se debe a que al multiplicar x por b^l, recorrimos el punto m lugares a la derecha en base b. Después, al tomar su parte fraccional y cambiarla a base b^l, se toman bloques de l dígitos (en base b) y estos bloques serán precisamente los que se repiten.

Ejemplo 1.8 (Conjunto de Cantor y normalidad) Un número $x \in \Omega$ pertenece al conjunto de Cantor si se escribe como

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$

para alguna sucesión $(a_k)_k$ que toma valores en $\{0, 2\}$. Dado que las expansiones $3-$ádicas de los elementos del conjunto de Cantor carecen de unos, entonces este conjunto no tiene ningún número simplemente normal en base 3 (y por lo tanto el Conjunto de Cantor no tiene ningún número normal en base 3 y ningún número absolutamente normal) y, por el Corolario 1.5, tampoco tiene elementos simplemente normales en ninguna potencia de 3. Este es un ejemplo de un conjunto no-numerable de números no-normales.

Capítulo 2

Números Normales-LLI

La Ley del Logaritmo Iterado (LLI) es otro importante teorema límite en Probabilidad. Nos habla acerca de qué tan grande puede ser la diferencia $\left(S^b_{a,n} - n\, b^{-1}\right)$. Recordemos que los números normales de Borel en base b se definen como aquéllos cuya expansión $b-$ádica se encuentra en el soporte de la Ley Fuerte de Grandes Números. En este capítulo se propone una definición de normalidad usando la LLI, se presentan ejemplos y contraejemplos de estos nuevos números normales y vemos que son un subconjunto de los números normales de Borel. También hacemos una comparación de esta nueva definición con otra definición reciente de normalidad que propone Belshaw [4] en su trabajo de tesis de maestría de 2004.

2.1 Ley del Logaritmo Iterado

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d. en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ arbitrario, con media μ y varianza finita y positiva σ^2. Sean además $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ y

$$Y_n = \frac{S_n - n\,\mu}{\sigma}.$$

La Ley Fuerte de Grandes Números nos dice que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Por otro lado, el Teorema del Límite Central (TLC) afirma que

$$\frac{Y_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z,$$

donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar y $\xrightarrow{d}$ indica convergencia en distribución. Es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Nos preguntamos qué pasa con el comportamiento de la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en medio de estos dos resultados, es decir, al dividir por algo más chico que n, pero más grande que $\sqrt{n}$. Una respuesta bastante satisfactoria es la LLI, la cual considera el denominador $\sqrt{2n \log\log n}$. Este resultado fue demostrado por Khintchine en 1924 y la demostración se presenta en el Apéndice A.

Para el siguiente Teorema, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad general.

Teorema 2.1 (Ley del Logaritmo Iterado) *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d. en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con media μ y varianza finita y positiva σ^2. Si $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ entonces*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = 1\right) = 1 \tag{2.1}$$

y

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = -1\right) = 1. \tag{2.2}$$

2.2 Números Normales y LLI

Después de que Borel demostró el Teorema de Números Normales, el comportamiento asintótico de la diferencia $\left(S_{a,n}^{b} - n\, b^{-1}\right)$ (es decir, de la suma centrada en cero de v.a.i.i.d. con distribución Bernoulli(b^{-1})) fue estudiado primeramente por F. Hausdorff en 1913, quien mostró que casi seguramente, para todo $\varepsilon > 0$,

$$S_{a,n}^{b} - n\, b^{-1} = O\left(n^{1/2+\varepsilon}\right).$$

Posteriormente G. H. Hardy & J. L. Littlewood en 1914 mostraron que casi seguramente

$$S_{a,n}^{b} - n\, b^{-1} = O\left(\sqrt{n \log n}\right).$$

Finalmente, A. Y. Khintchine en 1924, mediante la LLI encontró la normalización adecuada dada en el Teorema 2.1.

Si bien el estudio de los números normales dio lugar a la LLI, no hemos encontrado referencias donde se use este teorema para definir algún tipo de normalidad. Harman [15] expone claramente cómo fue que surgió la LLI y da una demostración de este resultado límite en el caso de los números normales en base dos. Pincus & Kalman [22] muestran evidencia empírica de que las expansiones en base 2 y 10 de e y $\sqrt{2}$ satisfacen la LLI.

En este capítulo se propone una definición de normalidad basada en la LLI. Se compara con la definición de Borel de número normal, encontrando que si un número está en el soporte de la LLI, entonces está en el soporte de la Ley Fuerte de Grandes Números, mas no necesariamente al revés.

2.3 Definiciones

Recordemos que estamos en el espacio de probabilidad $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$, con $\Omega = (0, 1]$, $\mathfrak{B}\left((0,1]\right)$ y $\mathbb{P}$ la medida de Lebesgue.

Definición 2.1 Decimos que $x \in \Omega$ es **simplemente normal-LLI en base b** si, para cada dígito $a \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, se satisface la Ley del Logaritmo Iterado de Khintchine, es decir, para todo $b-$dígito a,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{a,n}^{b}(x) - \frac{n}{b}}{\sqrt{2b^{-2}\,(b-1)\, n \log\log n}} = 1 \tag{2.3}$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S^b_{a,n}(x) - \frac{n}{b}}{\sqrt{2b^{-2}(b-1)\, n \log\log n}} = -1. \tag{2.4}$$

El número x es **normal-LLI en base b** si es simplemente normal-LLI en base b^j, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Ahora usaremos la LLI para mostrar que casi todo número es normal-LLI.

Teorema 2.2 *Casi todos los números son simplemente normales-LLI en cualquier base b.*

Demostración. Sean b una base y a un $b-$dígito. Como $S^b_{a,n}$ es la suma de n v.a.i.i.d. con media $1/b$ y varianza $(b-1)/b^2$, para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos el Teorema 2.1 y obtenemos lo que queríamos. ■

Corolario 2.1 *Casi todos los números son normales-LLI en cualquier base b.*

Demostración. La demostración es muy similar a la del Corolario 1.2. ■

La Definición 2.1 ha de ser más fuerte si al menos implica la definición de Borel de números normales.

Es bien conocido el hecho de que la Ley del Logaritmo Iterado implica la Ley Fuerte de Grandes Números. En términos de números normales se tiene lo siguiente:

Teorema 2.3 *Si x simplemente normal-LLI en base b, entonces x es simplemente normal en base b.*

Demostración. Sea $x \in \Omega$ tal que no es simplemente normal en la base b, siendo a un b-dígito tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{S^b_{a,n}(x)}{n} - \frac{1}{b} \right) \neq 0.$$

Equivalentemente ocurre alguna de las dos cosas siguientes:

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{S^b_{a,n}(x)}{n} - \frac{1}{b} \right) > 0.$$

$$\beta = \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{S^b_{a,n}(x)}{n} - \frac{1}{b} \right) < 0.$$

Notemos que si $\alpha < 0$, entonces $\beta < 0$ y al revés, si $\beta > 0$, entonces $\alpha > 0$.

Observamos primero que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{b^2}{b-1} \cdot \frac{n}{2\log\log n}} = \infty. \tag{2.5}$$

En el caso cuando $\alpha > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{S^b_{a,n}(x) - \frac{n}{b}}{\sqrt{2b^{-2}(b-1)n\log\log n}} &= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{S^b_{a,n}(x)}{n} - \frac{1}{b} \right) \frac{n}{\sqrt{2b^{-2}(b-1)n\log\log n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{S^b_{a,n}(x)}{n} - \frac{1}{b} \right) \sqrt{\frac{n^2}{2b^{-2}(b-1)n\log\log n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{S^b_{a,n}(x)}{n} - \frac{1}{b} \right) \sqrt{\frac{b^2}{b-1} \cdot \frac{n}{2\log\log n}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a (2.5) y a que $\alpha > 0$. Por lo tanto, x no satisface la condición (2.3) de la Definición 2.1.

En el caso cuando $\beta < 0$ vemos que,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{S^b_{a,n}(x) - \frac{n}{b}}{\sqrt{2b^{-2}(b-1)n\log\log n}} &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{S^b_{a,n}(x)}{n} - \frac{1}{b} \right) \sqrt{\frac{b^2}{b-1} \cdot \frac{n}{2\log\log n}} \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

De la misma forma, la última igualdad se debe a (2.5) y a que $\beta < 0$. Entonces x no satisface la condición (2.4) de la Definición 2.1.

Por lo tanto, si x es simplemente normal-LLI en base b, también es simplemente normal en base b. ■

2.4 Ejemplos y Contraejemplos

En esta sección retomamos algunos ejemplos del Capítulo 1 para ver si satisfacen la Definición 2.1, también proponemos un algoritmo para calcular un número simplemente normal-LLI.

Ejemplo 2.1 (El número de Champernowne no es simplemente normal-LLI) Sea x_0 el número de Champernowne en base 2, es decir, x_0 es tal que su representación binaria es

$$x_0 = 0.\,1\,10\,11\,100\,101\,110\,111\,1000\,\ldots_2$$

En el Capítulo 1 (Ejercicio 1.4) mencionamos que este número es simplemente normal en base dos. Sin embargo, como ahora demostraremos, no es simplemente normal-LLI en base dos.

Si definimos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$a_n = \frac{S^b_{1,n}(x_0) - \frac{n}{b}}{\sqrt{2b^{-2}(b-1)\,n\log\log n}} = \frac{S^2_{1,n}(x_0) - \frac{n}{2}}{\sqrt{2^{-2}2n\log\log n}} = \frac{S^2_{1,n}(x_0) - n/2}{\sqrt{2^{-1}n\log\log n}},$$

basta encontrar una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\limsup_{k\to\infty} a_{n_k} > 1$ para ver que x_0 no es simplemente normal-LLI en base 2, pues de esta forma no satisfacería la primera condición de la Definición 2.1. Nos fijaremos, en el número de Champernowne en base dos, en el último dígito (de izquierda a derecha) del último número natural (escrito en base dos) de k dígitos, para $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$0.\,\mathbf{1}\ 10\ 1\mathbf{1}\ 100\ 101\ 110\ 11\mathbf{1}\ 1000\ \ldots$$

De esta forma, $n_1 = 1,\ n_2 = n_1 + 4,\ n_3 = n_2 + 12, \ldots$ Entonces

$$n_k = \sum_{j=1}^{k} j2^{j-1} \quad y \quad S^2_{1,n_k}(x_0) = \sum_{j=1}^{k}(j+1)\,2^{j-2}.$$

Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned} n_k &= \sum_{j=1}^{k} j2^{j-1} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} 2^{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1-j} 2^i 2^j = \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \sum_{i=0}^{k-1-j} 2^i \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} 2^j\left(2^{k-j}-1\right) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^k - \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \\ &= k2^k - 2^k + 1. \end{aligned}$$

Así pues,

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_{n_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k}(j+1)\,2^{j-2}-\sum_{j=1}^{k} j2^{j-2}}{\sqrt{2^{-1}\,n_k \log\log n_k}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} 2^{j-2}}{\sqrt{2^{-1}\,n_k \log\log n_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k-1}-2^{-1}}{\sqrt{2^{-1}\left(k2^k-2^k+1\right)\log\log\left(k2^k-2^k+1\right)}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2^{2(k-1)}-2^{k-1}-2^{-2}}{\left(k2^{k-1}-2^{k-1}+2^{-1}\right)\log\log\left(k2^k-2^k+1\right)}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{e^{2(k-1)\log 2}-e^{(k-1)\log 2}-e^{-2\log 2}}{\left[e^{(k-1)\log 2+\log(k-1)}+e^{-\log 2}\right]\log\log\left[e^{(k-1)\log 2+\log(k-1)}+e^{-\log 2}\right]}} \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que $\limsup_{k\to\infty} a_{n_k}=\infty$, por lo que el número de Champernowne no es simplemente normal-LLI en base 2.

Ejemplo 2.2 (Los números racionales no son simplemente normales-LLI) Recordemos que los números racionales no son normales en ninguna base, pero sí pueden ser simplemente normales para alguna base. Sean b una base y $x\in\Omega$ un número racional que a su vez es simplemente normal en base b, pues esta clase de números son los únicos que nos pueden interesar debido a que contiene a la clase de números simplemente normales-LLI en base b. La cola de su expansión $b-$ádica consiste de cadenas iguales de, digamos, k dígitos. Recordemos que x es simplemente normal si, y sólo si, $\left\{b^l x\right\}$ es simplemente normal, para todo entero no-negativo l; es decir, los primeros dígitos de la expansión $b-$ádica de x no importan. Sea l tal que la expansión $b-$ádica de x consiste sólo de bloques de k dígitos (por el supuesto de normalidad simple, cada dígito en base b de x tiene que estar la misma cantidad de veces en el bloque de k dígitos). Si a es un $b-$dígito, el exceso de dígitos a, $S^b_{a,n}(x)-nb^{-1}$, no excederá k, pues $S^b_{a,n}(x)-nb^{-1}$ es cero cuando n toma valores en los múltiplos de k, por lo que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S^b_{a,n}(x)-\frac{n}{b}}{\sqrt{2b^{-2}(b-1)\,n\log\log n}}\right| &\le \lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{2b^{-2}(b-1)\,n\log\log n}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto x no es normal-LLI, pues no satisface la primera condición de la Definición 2.1.

2.4.1 Algoritmo para Encontrar Número Simplemente Normal-LLI

A continuación proponemos un algoritmo para construir un ejemplo de número que es simplemente normal-LLI en base dos.

Un número $x \in \Omega$ es simplemente normal-LLI en base dos si, y sólo si, la sucesión

$$A_n = \frac{2S_{1,n}^2(x) - n}{\sqrt{2n \log\log n}}$$

se acerca infinitas veces a uno y a menos uno.

Definamos la función

$$f(n) = \frac{1}{2}\left(n + \sqrt{2n \log\log n}\right).$$

Observemos que f es estrictamente creciente y como es suma de funciones cóncavas, también es cóncava. Además

$$\begin{aligned} \frac{2f(n) - n}{\sqrt{2n \log\log n}} &= \frac{n + \sqrt{2n\log\log n} - n}{\sqrt{2n \log\log n}} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Si $g(n) = \frac{1}{2}\left(n - \sqrt{2n \log\log n}\right)$, entonces

$$\frac{2g(n) - n}{\sqrt{2n \log\log n}} = -1.$$

Lo que haremos es definir un número x (en binario) a partir de una sucesión de ceros y unos tal que $S_{1,n}^2(x)$ oscile entre f y g, pues de esta forma A_n oscila entre 1 y -1.

Sean $n_1 = 2$ y $n_2 = 4$. Para $k > 2$ sea

$$n_k = \begin{cases} \text{mín}\left\{n : \frac{n_{k-1}}{2} + (n - n_{k-1}) > f(n)\right\} & \text{si} \quad k \text{ es impar.} \\ n_{k-2} + 2(n_{k-1} - n_{k-2}) & \text{si} \quad k \text{ es par.} \end{cases}$$

Cuando k es par, tenemos que $\frac{n_{k-1}}{2} + (n - n_{k-1}) < f(n)$. Entonces n_k existe cuando k es impar porque $\frac{n_{k-1}}{2} + (z - n_{k-1})$ es convexa creciente (con respecto a z), $f(z)$ cóncava y creciente y $\frac{n_{k-1}}{2} + (z - n_{k-1}) < f(z)$, si $z = n_{k-1}$.

Construimos x como

$$x = 0.\left(n_1 \text{ unos}\right)\left(n_3 - n_1 \text{ ceros}\right)\left(n_5 - n_3 \text{ unos}\right)\left(n_7 - n_5 \text{ ceros}\right)\cdots_2$$

Vamos a demostrar que $A_{n_{4k+1}} \overset{k\to\infty}{\to} 1$, $A_{n_{4k+3}} \overset{k\to\infty}{\to} -1$ y además A_n alcanza un máximo local (mínimo local) en $n = n_{4k+1}$ ($n = n_{4k+3}$). Para terminar la demostración, basta ver que A_n es monótona entre los n de la forma n_{4k+1} y n_{4k+3}, esto para asegurar que si $\varepsilon > 0$, $|A_n| < 1 + \varepsilon$, para n suficientemente grande.

Notemos primero que si k es par,

$$A_{n_k} = 0.$$

Sea k par. Para $k = 2$, como $S^2_{1,n_2}(x) = 2$,

$$A_{n_2} = \frac{2S^2_{1,4}(x) - 4}{\sqrt{8 \log\log 4}} = 0.$$

Supongamos que $A_{n_k} = 0$, es decir, hasta n_k hay exactamente la misma cantidad de ceros que de unos.

Tenemos que ver que de $n_k + 1$ a n_{k+2} hay la misma cantidad de ceros que de unos. Como n_{k+2} es par, $n_{k+2} = n_k + 2\left(n_{k+1} - n_k\right)$ y por construcción, de $n_k + 1$ a n_{k+1} hay sólo ceros o sólo unos, y lo contrario de $n_{k+1} + 1$ a n_{k+2}, por lo que hay la misma cantidad de ceros que de unos hasta $A_{n_{k+2}}$ y entonces $A_{n_{k+2}} = 0$. Por lo tanto hemos demostrado por inducción que $A_{n_k} = 0$ si k es par.

Ahora, observemos que $S^2_{1,n_{4k}}(x) = n_{4k}/2$ pues hay la misma cantidad de ceros que de unos en este punto. Entonces $S^2_{1,n_{4k+1}}(x) = n_{4k}/2 + (n_{4k+1} - n_{4k})$, pues es la cantidad de unos que se agregan. Así, tenemos por construcción que

$$S^2_{1,n_{4k+1}}(x) - f\left(n_{4k+1}\right) \le 1,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} A_{n_{4k+1}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{2S^2_{1,n_{4k+1}}(x) - n_{4k+1}}{\sqrt{2n_{4k+1}\log\log n_{4k+1}}} \\
&\le \lim_{k\to\infty} \frac{2\left[f\left(n_{4k+1}\right) + 1\right] - n_{4k+1}}{\sqrt{2n_{4k+1}\log\log n_{4k+1}}} \quad (\text{por } (2.6)) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De la misma forma se ve que $S^2_{0,n_{4k+3}}(x) - f(n_{4k+3}) \leq 1$ y, por tanto

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2S^2_{0,n_{4k+3}}(x) - n_{4k+3}}{\sqrt{2n_{4k+3}\log\log n_{4k+3}}} = 1.$$

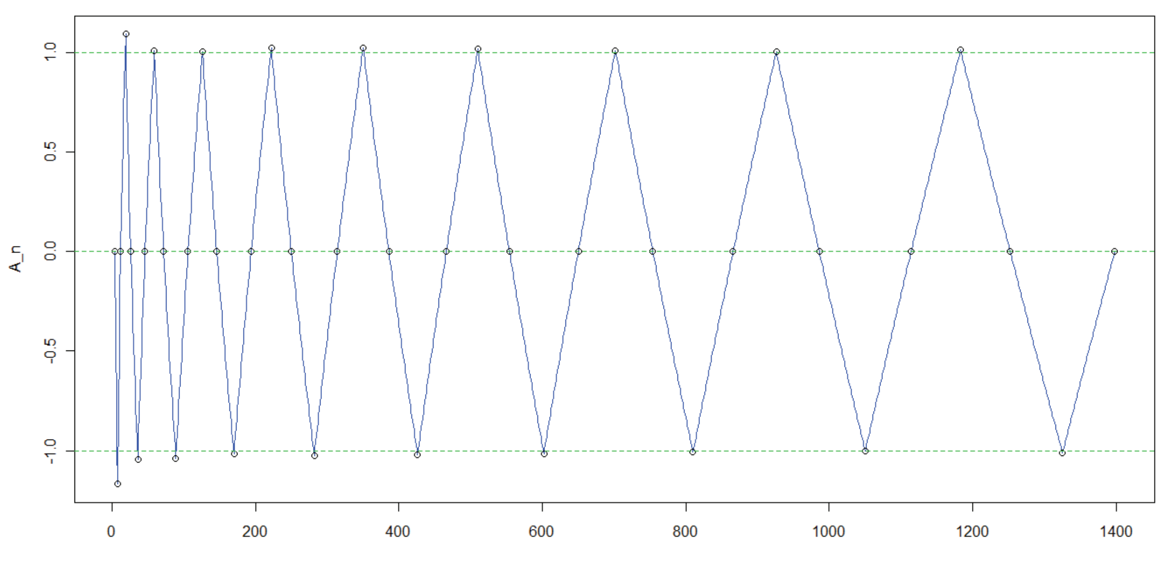
Como

$$S^2_{1,n}(x) - n = -\left[S^2_{0,n}(x) - n\right],$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} A_{n_{4k+3}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{2S^2_{1,n_{4k+3}}(x) - n_{4k+3}}{\sqrt{2n_{4k+3}\log\log n_{4k+3}}} \\ &= -\lim_{k\to\infty} \frac{2S^2_{0,n_{4k+3}}(x) - n_{4k+3}}{\sqrt{2n_{4k+3}\log\log n_{4k+3}}} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Ahora, $A_{n_{4k+1}}$ ($A_{n_{4k+3}}$) es máximo (mínimo) local, pues es donde dejamos de añadir unos (ceros) y a partir de ahí la sucesión decrece (crece). Así también vemos que A_n es monótona entre los n de la forma n_{4k+1} y n_{4k+3}. La siguiente gráfica muestra la trayectoria de A_n desde n_2 hasta n_{20}. Los puntos que se ven en la gráfica, son precisamente los de la forma A_{n_k}.



Dado que este algoritmo se genera agregando grandes bloques de unos y grandes bloques de ceros, podemos encontrar una cadena de ceros y unos que no aparezca, por lo que este número no es normal-LLI en base dos. Habría que agregar los dígitos de una manera diferente para que este número, que es simplemente normal-LLI en base dos, también sea normal-LLI en base dos.

2.5 Relación con Números Fuertemente Normales

En su trabajo de tesis de maestría, Belshaw [4] define otro concepto de normalidad, motivado por el hecho de que

$$\mathbb{E}\left[\frac{\left(S_{a,n}^{b}-nb^{-1}\right)^{2}}{\sqrt{(b-1)\,b^{-2}n}}\right]=1, \tag{2.7}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ y $a \in \{0,1,\ldots,b-1\}$. La igualdad (2.7) se debe a que

$$(b-1)\,b^{-2}n = \operatorname{Var}\left(S_{a,n}^{b}\right) = \mathbb{E}\left[\left(S_{a,n}^{b}-nb^{-1}\right)^{2}\right].$$

Definición 2.2 Decimos que $x \in \Omega$ es **simple y fuertemente normal en base $\boldsymbol{b}$** ≥ 2 si para cada dígito $a \in \{0,1,\ldots,b-1\}$ y cada $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left(S_{a,n}^{b}-nb^{-1}\right)^{2}}{(b-1)\,b^{-2}n^{1+\varepsilon}} = 0 \tag{2.8}$$

y

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left(S_{a,n}^{b}-nb^{-1}\right)^{2}}{(b-1)\,b^{-2}n^{1-\varepsilon}} = \infty. \tag{2.9}$$

El número x es **fuertemente normal en base $\boldsymbol{b}$** si es simple y fuertemente normal en base b^j, para cada $j \in \mathbb{N}$.

La LLI proporciona una demostración casi inmediata de que casi todo número es fuertemente normal en cualquier base. La forma en que Belshaw demuestra esto es reproduciendo la demostración original del Teorema de Números Normales de Borel.

Observemos que en la Definición 2.2 el término $(b-1)\,b^{-2}$ puede reemplazarse por cualquier otra constante positiva sin que cambie la definición. A diferencia de esto, los números normales-LLI que proponemos en la Sección 2.3, dependen fuertemente de este término.

La Definición 2.2 tampoco dice nada acerca del caso cuando $\varepsilon = 0$. Vamos a ver (Corolario 2.4) que la LLI nos dice que cuando $\varepsilon = 0$, el lím sup de la sucesión en (2.9) se va a infinito, con probabilidad uno.

A continuación vemos que normalidad-LLI implica normalidad fuerte. En la siguiente sección presentamos un ejemplo de número simple y fuertemente normal en base dos que no es normal en base dos ni simplemente normal-LLI en base dos.

Teorema 2.4 Casi todo número es simple y fuertemente normal en base b, para toda $b \geq 2$.

Demostración. Sean b una base y a un $b-$dígito. Como $S_{a,n}^{b} \sim Bin\left(n, \frac{1}{b}\right)$, entonces

$$\mathbb{E}\left(S_{a,n}^{b}\right) = n/b \text{ y } \operatorname{Var}\left(S_{a,n}^{b}\right) = n\left(b-1\right)/b^{2}.$$

La LLI dice que, casi seguramente,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{a,n}^{b} - \frac{n}{b}}{\sqrt{2\frac{b-1}{b^{2}} n \log\log n}} = 1.$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_{a,n}^{b} - \frac{n}{b}}{\sqrt{2\frac{b-1}{b^{2}} n \log\log n}} = -1.$$

Como consecuencia se esto, se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\left(S_{a,n}^{b} - \frac{n}{b}\right)^{2}}{2\frac{b-1}{b^{2}} n \log\log n} = 1\right) = 1,$$

Por otro lado, para todo $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\log\log n}{n^{\varepsilon}} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\log\log n}{n^{-\varepsilon}} = \infty. \tag{2.10}$$

Con los resultados anteriores, trivialmente se concluye que, con probabilidad uno, para todo $\varepsilon \in (0,1)$,

$$(i) \limsup_{n\to\infty} \frac{\left(S_{a,n}^b - \frac{n}{b}\right)^2}{\frac{b-1}{b^2} n^{1+\varepsilon}} = \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{\left(S_{a,n}^b - \frac{n}{b}\right)^2}{2\frac{b-1}{b^2} n \log\log n}\right]\left[\frac{2\log\log n}{n^{\varepsilon}}\right] = 0.$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \frac{\left(S_{a,n}^b - \frac{n}{b}\right)^2}{\frac{b-1}{b^2} n^{1-\varepsilon}} = \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{\left(S_{a,n}^b - \frac{n}{b}\right)^2}{2\frac{b-1}{b^2} n \log\log n}\right]\left[\frac{2\log\log n}{n^{-\varepsilon}}\right] = \infty.$$

Por lo que se ha demostrado que, para cada base, casi todo número es simplemente fuertemente normal. ■

Corolario 2.2 *Casi todo número es fuertemente normal en base b, para cada b.*

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 2.4 y la definición de número normal-LLI. ■

Corolario 2.3 *Si $x \in \Omega$ es simplemente normal-LLI en base $b \geq 2$, entonces es simple y fuertemente normal.*

Demostración. Se sigue de que el Teorema 2.4 se demuestra suponiendo que un número satisface la LLI y a partir de esto se muestra que ese número es simple y fuertemente normal. ■

Observemos que el siguiente corolario involucra la sucesión de la Definición 2.2 cuando $\varepsilon = 0$.

Corolario 2.4 *Para cada $b \geq 2$ y cada dígito $a \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$,*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\left(S_{a,n}^b - nb^{-1}\right)^2}{(b-1)\, b^{-2} n} = \infty\right) = 1.$$

Demostración. Es el caso cuando $\varepsilon = 0$ en (2.10), en la demostración del Teorema 2.4. ■

Teorema 2.5 Si $x \in \Omega$ es simple y fuertemente normal en base $b \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, entonces es simplemente normal en esa misma base.

Demostración. Sean $x \in \Omega$, b una base y a un dígito de esa base tales que x no es simplemente normal, o sea,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{a,n}^{b}(x)}{n} \neq \frac{1}{b},$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{b-1}{b^2}n}} \left[S_{a,n}^{b}(x) - \frac{n}{b}\right] \neq 0.$$

O equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(b-1)\,b^{-2}n^2} \left[S_{a,n}^{b}(x) - \frac{n}{b}\right]^2 \neq 0,$$

que es lo mismo que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{b-1}{b^2}n^2} \left[S_{a,n}^{b}(x) - \frac{n}{b}\right]^2 > 0.$$

Como

$$\frac{1}{\frac{b-1}{b^2}n^2} \left[S_{a,n}^{b}(x) - \frac{n}{b}\right]^2 < \frac{1}{\frac{b-1}{b^2}n^{1+\varepsilon}} \left[S_{a,n}^{b}(x) - \frac{n}{b}\right]^2,$$

siempre y cuando $0 < \varepsilon < 1$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{b-1}{b^2}n^{1+\varepsilon}} \left[S_{a,n}^{b}(x) - \frac{n}{b}\right]^2 > 0,$$

por lo que x no es simplemente fuertemente normal en base b. Por lo tanto, si en alguna base x es simplemente fuertemente normal, entonces es simplemente normal. ■

2.5.1 Ejemplos de Números Simple y Fuertemente Normales

En esta subsección vemos un par de ejemplos de números simple y fuertemente normales. En el Ejemplo 2.3 vemos que la definición de normalidad que proponemos basada en la LLI es más fuerte que la propuesta por Belshaw.

Ejemplo 2.3 (Número simple y fuert. normal que no es simp. normal-LLI) Sea

$$x_0 = 0.\ 0\ 1\ 00\ 11\ 000\ 111\ 0000\ldots_2$$

Vemos que x_0 no es normal en base dos, pues la cadena 101 nunca aparece, por ejemplo.

Sea $A_n = S^2_{0,n}(x_0) - 2^{-1}n, \ \forall n$. Veamos que A_n se anula cada vez que termina una secuencia de unos.

Por otro lado A_n es más grande (con respecto a n) cuando terminan las sucesiones de ceros. Definamos pues la sucesión de estos valores de n :

$$\begin{aligned} n_k &= 2\left[1+2+\cdots+(k-1)\right]+k \\ &= (k-1)\,k = k^2, \ \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

Entonces $S^2_{0,n_k}(x_0) = 1+2+\cdots+k = 2^{-1}\,k\,(k+1)$ y consecuentemente

$$\begin{aligned} A_{n_k} &= S^2_{0,n_k}(x_0) - 2^{-1}n_k \\ &= 2^{-1}\,k\,(k+1) - 2^{-1}k^2 \\ &= 2^{-1}k. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\frac{A_{n_k}}{\sqrt{n_k}} = \frac{2^{-1}k}{k} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto x_0 es simple y fuertemente normal en base 2, pues si $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} (i)\ \limsup_{n\to\infty} \frac{A_n^2}{n^{1+\varepsilon}} &= \frac{1}{2^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\varepsilon}} = 0. \\ (ii)\ \limsup_{n\to\infty} \frac{A_n^2}{n^{1-\varepsilon}} &= \frac{1}{2^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{-\varepsilon}} = \infty. \end{aligned}$$

Observemos también que x_0 no es simplemente normal-LLI, pues

$$\limsup_{n_k\to\infty}\frac{A_{n_k}}{\sqrt{n_k}\sqrt{2\log\log n_k}} = \lim_{n_k\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{2\log\log n_k}} = 0 \neq 1.$$

Ejemplo 2.4 Como los números simple y fuertemente normales son un subconjunto de los números simplemente normales-LLI, el algoritmo que proponemos en la subsección 2.4.1 para obtener un número simplemente normal-LLI en base dos, proporciona otro ejemplo de número simple y fuertemente normal en base dos.

Capítulo 3

Números Normales de Pascal y TLC

El objetivo del presente capítulo es proponer y estudiar dos posibles definiciones alternativas de números normales. La primera está basada en un esquema de observación de ensayos Bernoulli, pero haciendo muestreo tipo Pascal en lugar de binomial, el cual consiste en estudiar el comportamiento del número de dígitos necesarios para observar k veces un dígito dado. La segunda propuesta consiste en utilizar otro resultado límite importante en probabilidad, el célebre Teorema del Límite Central, pero considerando convergencia tipo casi segura, en lugar de convergencia en distribución. En el primero de los casos probamos que los números normales de Borel son equivalentes a los números normales de Pascal que aquí proponemos, mientras que el segundo da una nueva clase de números normales contenidos en los números normales de Borel.

3.1 Números Normales Pascal

La distribución Pascal es una distribución de probabilidad discreta que modela el tiempo de espera para obtener una cantidad especificada de éxitos, digamos r, en una sucesión de ensayos independientes de Bernoulli con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos; su valor esperado es r/p. En este capítulo proponemos un nuevo concepto de normalidad a partir de esta distribución y lo comparamos con la definición de Borel de número normal. La intuición nos dice que ambos conceptos son los mismos, pues no debería importar la forma en que se observan los dígitos. Sin embargo, la demostración de este hecho necesita aún trabajarse.

Una variable aleatoria con distribución geométrica con parámetro p modela el tiempo de espera para observar por primera vez un éxito en una sucesión de ensayos Bernoulli con parámetro p. Así pues, la suma de r v.a.i.i.d con distribución geométrica y parámetro p tiene una distribución binomial negativa con parámetros r y p.

3.1.1 Definiciones

Como hemos visto en los dos capítulos anteriores, el concepto clásico de número normal está relacionado a la distribución binomial dos de los teoremas límite que ésta satisface. De la misma forma que la distribución binomial es suma de v.a.i.i.d., con distribución Bernoulli, la distribución Pascal es suma de v.a.i.i.d. con distribución geométrica (que está definida a partir de ensayos Bernoulli independientes). Dado lo anterior, una pregunta natural es si podemos definir un nuevo concepto de normalidad inspirado en la distribución Pascal y de ser así, qué se obtiene al comparar con la definición que ya tenemos.

Sean $\boldsymbol{R^b_{a,r}(x)}$ el número de dígitos necesario para observar r veces el dígito a en la expansión en base b del número x. Formalmente,

$$\boldsymbol{R^b_{a,r}(x)} = \text{mín}\left\{m \in \mathbb{N} : \ S^b_{a,m}(x) = r\right\}.$$

Ahora vamos a ver que $R^b_{a,r}$ es la suma de r v.a.i.i.d. con distribución geométrica con probabilidad de éxito $1/b$.

Para cada base b y a un $b-$dígito, sea $\xi^b_{a,1}(x) = R^b_{a,1}(x)$ y

$$\xi^b_{a,k}(x) = R^b_{a,k}(x) - R^b_{a,k-1}(x),$$

si $k \geq 2$.

Proposición 3.1 *Sean b una base y a un $b-$dígito. Entonces $\left(\xi^b_{a,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. con distribución geométrica con parámetro $1/b$.*

Demostración. Dado que $\left(\mathbf{1}_{\left[d_j^b=a\right]}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ son v.a.i.i.d. con distribución Bernoulli y probabilidad de éxito $1/b$ (Proposición 1.1), $\xi_{a,k}^b$ tiene distribución geométrica con probabilidad de éxito $1/b$, pues $\xi_{a,k}^b(x)$ es precisamente el número de dígitos necesario para observar por primera vez el dígito a después de haberlo observado exactamente $k-1$ veces, en la expansión en base b del número x.

La independencia es análoga a la demostración de la independencia de la sucesión de variables aleatorias $\left(\mathbf{1}_{\left[d_j^b=a\right]}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, en la Proposición 1.1. ■

Corolario 3.1 *Sean $r \in \mathbb{N}$, b una base y a un $b-$dígito. Entonces $R_{a,r}^b$ tiene una distribución Pascal con parámetros r y $1/b$.*

Demostración. Sea $x \in \Omega$. Dado que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r}\xi_{a,k}^b &= \sum_{k=2}^{r}\left[R_{a,k}^b(x)-R_{a,k-1}^b(x)\right]+R_{a,1}^b(x)\\ &= R_{a,r}^b(x)-R_{a,1}^b(x)+R_{a,1}^b(x)\\ &= R_{a,r}^b(x),\end{aligned}$$

entonces $R_{a,r}^b$ es la suma de r v.a.i.i.d. con distribución geométrica $1/b$, por la Proposición 3.1. Entonces $R_{a,r}^b$ tiene distribución Pascal con parámetros r y $1/b$. ■

Definición 3.1 Un número $x \in \Omega$ se dice **simplemente normal de Pascal en base *b*** si

$$\lim_{r\to\infty}\frac{R_{a,r}^b(x)}{r}=b,$$

para todo b-dígito a.

El número x es **normal de Pascal en base *b*** si es simplemente normal de Pascal en base b, para cada base b.

Teorema 3.1 *Sea b una base. Casi todo número es simplemente normal de Pascal en base b.*

Demostración. Sea a un b-dígito. La Proposición 3.1 nos dice que $\left(\xi_{a,k}^{b}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. geométricas con parámetro $1/b$, entonces $\mathbb{E}\left(\xi_{a,k}^{b}\right) = b$. Como $R_{a,r}^{b} = \sum_{k=1}^{r} \xi_{a,k}^{b}$, la Ley Fuerte de Grandes Números nos dice que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{r\to\infty} \frac{R_{a,r}^{b}}{r} = b\right) = 1,$$

por lo que casi todo número es simplemente normal en base b, para cada base b. ■

Corolario 3.2 *Sea b una base. Casi todo número es normal de Pascal en base b.*

Demostración. Es análoga a la demostración del Corolario 1.2. ■

3.1.2 Relación con Números Normales de Borel

Antes de comparar esta definición con la definición de normalidad de Borel, observemos que $x \in \Omega$ no es simplemente normal de Pascal en base b si, y sólo si, existe un b-dígito a tal que $R_{a,r}^{b}(x)$ no esté definida para alguna $r \in \mathbb{N}$, o existen $\varepsilon > 0$ e infinitos r_j, tales que

$$\frac{R_{a,r_j}^{b}(x)}{r_j} > b + \varepsilon, \ \forall j, \tag{3.1}$$

o bien,

$$\frac{R_{a,r_j}^{b}(x)}{r_j} < b - \varepsilon, \ \forall j. \tag{3.2}$$

De la misma forma, x no es simplemente normal si, y sólo si, existen un b-dígito a, $\varepsilon > 0$ e infinitos $n_j \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{S_{a,n_j}^{b}(x)}{n_j} > \frac{1}{b-\varepsilon}, \ \forall j. \tag{3.3}$$

ó

$$\frac{S_{a,n_j}^{b}(x)}{n_j} < \frac{1}{b+\varepsilon}, \ \forall j. \tag{3.4}$$

Otra propiedad de los números normales de Borel que nos será útil es la siguiente.

Proposición 3.2 *Sea $x \in \Omega$ tal que no es simplemente normal en base b. Entonces existen un b-dígito a, $\varepsilon > 0$ e infinitos $n_j \in \mathbb{N}$ tales que (3.3) se satisface.*

La Proposición 3.2 quiere decir que (3.3) es condición necesaria y suficiente para que x no sea simplemente normal en base b.

Demostración. Supongamos que $x \in \Omega$ no es simplemente normal en base b y satisface (3.4) para el dígito a_0. Sea $A = \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Tenemos que

$$\sum_{a \in A} S^b_{a,n_j}(x) = n_j \quad \text{pues} \quad \frac{\sum_{a \in A} S^b_{a,n_j}(x)}{n_j} = 1.$$

Si definimos $\eta = \frac{1}{b} - \frac{1}{b+\varepsilon} > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{a \in A \setminus \{a_0\}} S^b_{a,n_j}(x)}{n_j} &= 1 - \frac{S^b_{a_0,n_j}(x)}{n_j} > 1 - \frac{1}{b+\varepsilon} \\ &= 1 - \frac{1}{b} + \eta = \frac{b-1}{b} + \eta \\ &= (b-1)\left(\frac{1}{b} + \frac{\eta}{b-1}\right). \end{aligned}$$

Al restar el miembro de la derecha tenemos que

$$\sum_{a \in A \setminus \{a_0\}} \left[\frac{S^b_{a,n_j}(x)}{n_j} - \left(\frac{1}{b} + \frac{\eta}{b-1}\right)\right] > 0.$$

Se sigue que

$$\frac{S^b_{a,n_j}(x)}{n_j} - \left(\frac{1}{b} + \frac{\eta}{b-1}\right) > 0$$

para al menos un dígito $a \in A$. Y como esto ocurre para cada n_j, entonces existe $a_1 \in A$ tal que se satisface (3.3), tomando $\varepsilon' = b\eta\,(b-1+b\eta)^{-1}$. Observe que

$$\frac{1}{b-\varepsilon'} = \frac{b-1+b\eta}{b\,(b-1)+b\eta-b\eta} = \frac{1}{b} + \frac{\eta}{b-1}.$$

Por lo tanto un número es no simplemente normal si, y sólo si, se satisface (3.3). ∎

Proposición 3.3 *El número $x \in \Omega$ es simplemente normal en base b si, y sólo si, x es simplemente normal de Pascal en base b.*

Demostración. Veamos primero que si x no es simplemente normal de Pascal, entonces tampoco es simplemente normal.

Sean $x \in \Omega$ tal que no es simplemente normal Pascal en base b. Si $R^b_{a,r}(x)$ no está definida para algún dígito a y $r \geq 2$, entonces el dígito a sólo aparecería una cantidad finita de veces en la expansión $b-$ádica de x y, por tanto, $S^b_{a,n}(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Supongamos que se cumple (3.1). Sea $n_j = R^b_{a,r_j}(x) = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : S^b_{a,m}(x) = r_j\}$. Entonces se cumple

$$\begin{aligned} \frac{S^b_{a,n_j}(x)}{n_j} &< \frac{S^b_{a,n_j}(x)}{r_j(b+\varepsilon)} \quad (\text{por } (3.1)) \\ &= \frac{1}{b+\varepsilon} \qquad (\text{pues } S^b_{a,n_j}(x) = r_j.) \end{aligned}$$

Entonces se cumple (3.4) para cada n_j. Las n_j son infinitas debido a que

$$n_j = R^b_{a,r_j}(x) > (b+\varepsilon)\, r_j$$

y las r_j son infinitas.

Supongamos ahora que se cumple (3.2). Tomemos la sucesión $(r_j)_j$ estrictamente creciente, sin pérdida de generalidad. Definamos n_j de la misma forma. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{S^b_{a,n_j}(x)}{n_j} &> \frac{S^b_{a,n_j}(x)}{r_j(b-\varepsilon)} \quad (\text{por } (3.2)) \\ &= \frac{1}{b-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Las n_j son infinitas debido a que, como la sucesión $(r_j)_j$ es creciente,

$$\begin{aligned} n_i &= \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : S^b_{a,m}(x) = r_i\} \\ &< \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : S^b_{a,m}(x) = r_i + 1\} \\ &\leq \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : S^b_{a,m}(x) = r_{i+1}\} \\ &\leq n_j, \ \forall j > i. \end{aligned}$$

De esta forma, hay una infinidad de n_j que satisfacen (3.3).

De lo anterior deducimos que, si x no es simplemente normal Pascal, entonces tampoco es simplemente normal.

Ahora demostremos que si x no es simplemente normal en base b, tampoco lo es simplemente normal Pascal.

Sea x tal que no es simplemente normal en base b, entonces, por la Proposición 3.2 se satisface (3.3). Definamos $r_j = S^b_{a,n_j}(x)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{R^b_{a,r_j}(x)}{r_j} &< \frac{(b-\varepsilon)\, R^b_{a,r_j}(x)}{n_j} \quad \text{por (3.3)} \\ &= (b-\varepsilon)\frac{\min\left\{m \in \mathbb{N} : \ S^b_{a,m}(x) = S^b_{a,n_j}(x)\right\}}{n_j} \\ &\leq (b-\varepsilon)\frac{n_j}{n_j} = b-\varepsilon.\end{aligned}$$

Y existen una infinidad de r_j porque de lo contrario habría sólo una cantidad finita de $S^b_{a,n_j}(x)$ distintas y, por consiguiente,

$$\lim_{n_j\to\infty}\frac{S^b_{a,n_j}(x)}{n_j} = 0,$$

lo que nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto, se satisface (3.2). Por lo tanto x es simplemente normal de Pascal en base b si, y sólo si, x es simplemente normal en base b. ■

Proposición 3.4 *El número $x \in \Omega$ es normal en base b si, y sólo si, x es normal de Pascal en base b.*

Demostración. Sea $x \in \Omega$ normal en base b, es decir, x es simplemente normal en base b^j, $\forall j \geq 1$, por Proposición 1.4. Esto ocurre si, y sólo si, x es simplemente normal de Pascal en base b^j, para cada $j \geq 1$, por la Proposición 3.3. Es decir, si x es normal de Pascal en base b. ■

3.2 Números Normales-TLC

En esta sección damos un primer intento de definición de normalidad usando un Teorema del Límite Central (TLC) con convergencia casi segura, llegando a que si un número satisface esta nueva definición, entonces es número normal de Borel en alguna base.

3.2.1 TLC y Números Normales

Recordemos que el TLC nos dice que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. en un espacio de probabilidad general $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con media μ y varianza finita y positiva σ^2 y además $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, entonces

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z,$$

donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar.

A diferencia del TLC, la Ley Fuerte de Grandes Números y la LLI establecen convergencia casi segura. Recordemos que convergencia casi segura implica convergencia en distribución, pero al revés no necesariamente es cierto. Por otra parte, la LLI implica que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - n\mu|}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = 1\right) = 1.$$

De aquí que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - n\mu|}{\sigma\sqrt{n}} = \infty\right) = 1.$$

Es por estas razones que no tiene sentido pensar en el TLC para proponer otra clase de normalidad, sin embargo existen resultados de TLC con convergencia casi segura. Para dar una definición razonable de normalidad basada en alguno de estos teoremas, es deseable que casi todo número satisfaga tal definición y que además implique la normalidad simple de Borel. El siguiente teorema cumple con estas condiciones. Su demostración puede encontrarse en Schatte [24] y en el Apéndice B damos un esbozo de ella.

Teorema 3.2 (TLC casi seguro) *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d. en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con media cero y varianza uno. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Si existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$. Entonces*

$$\mathbb{P}\left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right|^{2\eta} \frac{1}{n} = \frac{2^\eta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\eta + \frac{1}{2}\right)\right] = 1,$$

para toda $\eta > 0$.

Este resultado puede compararse con el famoso Principio de Invarianza de Strassen,

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{K\to\infty} \frac{1}{N^{1+\eta}\left(2\log\log N\right)^{\eta}} \sum_{n=1}^{N} |S_n|^{2\eta} = \frac{2\left(2\eta+2\right)^{\eta-1}}{\left(2\eta\right)^{\eta}} \left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^{2\eta}}}\right)^{-2\eta}\right] = 1.$$

3.2.2 Definiciones

En esta sección proponemos otro tipo de normalidad basándonos en el Teorema 3.2 casi seguro, tomando $\eta = 2$. También demostramos que casi todo número satisface esta definición y que implica normalidad simple de Borel.

Definición 3.2 Un número $x \in \Omega$ es **simplemente normal-TLC en base *b*** si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{S_{a,n}^{b}(x) - nb^{-1}}{\sqrt{n(b-1)b^{-2}}} \right|^4 \frac{1}{n} = 3.$$

El número x es **normal-TLC en base *b*** si x es simplemente normal en base b^j, para toda $j \geq 1$.

Teorema 3.3 *Sea b una base. Casi todo número es simplemente normal-TLC en base b.*

Demostración. Sea

$$S_n = \frac{S_{a,n}^{b} - nb^{-1}}{\sqrt{(b-1)b^{-2}}},$$

entonces S_n es la suma de n v.a.i.i.d. Tenemos que el tercer momento de cada sumando de S_n existe y es finito, por ser una combinación lineal del sumando correspondiente de $S_{a,n}^{b}$, que tiene distribución Bernoulli.

Por otro lado, como

$$\left| \frac{S_{a,n}^{b} - nb^{-1}}{\sqrt{n(b-1)b^{-2}}} \right|^4 \frac{1}{n} = \left| \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right|^{2\cdot 2} \frac{1}{n}$$

y

$$3 = \frac{2^2}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{2^\eta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\eta + \frac{1}{2}\right),$$

entonces, por el Teorema 3.2 con $\eta = 2$, tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{S_{a,n}^{b}(x) - nb^{-1}}{\sqrt{n(b-1)b^{-2}}} \right|^4 \frac{1}{n} = 3 \right) = 1.$$

■

Corolario 3.3 *Sea b una base. Casi todo número es normal-TLC en base b.*

Demostración. Es análoga a la demostración del Corolario 1.2. ∎

Por último demostramos que la definición de normalidad que proponemos en esta subsección, basada en el TLC, implica la normalidad de Borel.

Teorema 3.4 *Si el número $x \in \Omega$ es simplemente normal-TLC en base b, entonces x es simplemente normal en base b.*

Demostración. Sea $x \in \Omega$ simplemente normal-TLC en base b. Definamos

$$A_n = \left(\frac{S_{a,n}^b(x)}{n} - \frac{1}{b} \right)^4 \geq 0.$$

El número x es simplemente normal en base b si, y sólo si,

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = 0.$$

Por otro lado, por hipótesis tenemos que,

$$\begin{aligned}
3 &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{S_{a,n}^b(x) - nb^{-1}}{\sqrt{n(b-1)b^{-2}}} \right|^4 \frac{1}{n} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{n}{\sqrt{n(b-1)b^{-2}}} \right|^4 \frac{A_n}{n} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{n}{\sqrt{n(b-1)b^{-2}}} \right|^4 \frac{A_n}{n} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{n\,A_n}{[(b-1)b^{-2}]^2} \\
&\geq \frac{b^4}{(b-1)^2} \limsup_{N\to\infty} \frac{N}{\log N} A_N.
\end{aligned}$$

De aquí que

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{N}{\log N} A_N < \infty$$

y por consiguiente que

$$\limsup_{N\to\infty} A_N = 0,$$

pues $N/\log N$ es creciente y no acotada. Por lo tanto x es simplemente normal en base b. ∎

Corolario 3.4 *Sea $x \in \Omega$ normal-TLC en base b, entonces x es normal en base b.*

Demostración. Tenemos que x es simplemente normal-TLC en base b^n, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 3.4, x es simplemente normal en base b^n, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la Proposición 1.4, x es normal en base b. ■

Ejemplo 3.1 (Los racionales no son simplemente normales-TLC) Recordemos nuevamente que los números racionales no son normales ni simplemente normales-LLI, pero sí puede haber racionales que sean simplemente normales.

Sea $x \in \Omega$ un número racional y simplemente normal en base b, pues los números simplemente normales-TLC en base b están contenidos en los números simplemente normales en la misma base. Supongamos sin pérdida de generalidad que los dígitos de la expansión b-ádica de x son periódicos con periodo c, pues los primeros dígitos de la expansión b-ádica de x no importan. Entonces cada una de estas cadenas de longitud c tiene el mismo número de cada uno de los b-dígitos, pues x es simplemente normal en base b. De aquí que,

$$\left|S_{a,nc}^{b}\left(x\right)-nc/b\right|=0,$$

para cada b-dígito a y cada $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente,

$$\left|S_{a,n}^{b}\left(x\right)-n/b\right|\leq c,$$

para cada b-dígito a y cada $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{S_{a,n}^{b}\left(x\right)-nb^{-1}}{\sqrt{n\left(b-1\right)b^{-2}}}\right|^{4}\frac{1}{n} &\leq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c}{\sqrt{n\left(b-1\right)b^{-2}}}\right|^{4}\frac{1}{n}\\
&\leq \lim_{N\to\infty}\frac{c^{4}}{\left(b-1\right)^{2}b^{-4}\log N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}}\\
&= 0<3,
\end{aligned}$$

pues

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}}<\infty.$$

Por lo tanto los números racionales no son simplemente normales-TLC en ninguna base.

Observemos que si en el Teorema 3.2 tomamos $\eta = k$, para $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos que se obtienen tienen cada uno probabilidad uno y por lo tanto su intersección también tiene probabilidad uno. El soporte de esta intersección, para un b-dígito fijo puede definirse como otra clase de números simplemente normales-TLC en base b. Es un problema pendiente el estudio de ese conjunto; de momento sabemos que está propiamente contenido en el conjunto de números simplemente normales de Borel en base b, pues el soporte del Teorema 3.2 está contenido en los números simplemente normales de Borel en alguna base, para cualquier valor entero de η mayor a uno. Además los números racionales no están en este soporte. Esto se demuestra de manera análoga a como se hizo para $\eta = 2$. Por lo tanto la intersección también está contenida en los números simplemente normales en base b y no contiene números racionales.

Apéndice A

Ley del Logaritmo Iterado

En esta sección damos la demostración de la Ley del Logaritmo Iterado (LLI) para v.a.i.i.d. simples[1]. Se trata de un caso particular del Teorema 2.1, pero suficiente para el estudio que se hace en el Capítulo 2. En lo que resta, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será una sucesión de v.a.a.i.i.d. simples con media cero y varianza uno, en un espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$. Además $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ y $M_n = \max\{S_0,\ S_1, \ldots, S_n\}$, donde $S_0 = 0$.

Teorema A.1 (Ley del Logaritmo Iterado) *Se cumple que*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\right) = 1. \tag{A.1}$$

Observemos que el Teorema A.1 implica el Teorema 2.1 para funciones simples. Sean $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.a.i.i.d. simples con media μ y varianza $\sigma^2 \in (0,1)$, en un espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$, $S'_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k$, $X_n = (Y_n - \mu)/\sigma$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{S'_n - n\mu}{\sqrt{2\sigma^2 n\log\log n}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k - \mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sqrt{2n\log\log n}}\\ &= \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}}.\end{aligned}$$

[1] Una variable aleatoria es simple si toma un número finito de valores.

Además se ve que $(X_n)_n$ y $(-X_n)_n$ son sucesiones de v.a.a.i.i.d. simples con media cero y varianza uno, por lo que el Teorema A.1 nos dice que

$$
\begin{aligned}
(i)\ \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n' - n\mu}{\sqrt{2\sigma n \log\log n}} = 1\right) &= \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(i)\ \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n' - n\mu}{\sqrt{2\sigma n \log\log n}} = -1\right) &= \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = -1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{-S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

La última igualdad se obtiene al aplicar el Teorema A.1 a $(-X_n)_n$.

La demostración que presentamos de la LLI se encuentra en Billingsley [6] y usa funciones generatrices de momentos y el llamado Estimador de Desviaciones Grandes.

Recordamos la definición y algunas propiedades de las funciones generatrices de momentos. Si X es una variable aleatoria simple que toma valores $x_1, \ldots, x_l$, entonces su **función generatriz de momentos (fgm)** se define como

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \sum_{i=1}^{l} \mathbb{P}(X = x_i)\, e^{tx_i}.$$

Se tiene que

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = M_X^{(k)}(0),$$

para cada $k \geq 1$.

Otra consecuencia es

$$M_{S_n}(t) = [M_{X_1}(t)]^n. \tag{A.2}$$

La **función generatriz de cumulantes (fgc)** de X se define como

$$C_X(t) = \log M_X(t).$$

Cumple que

$$C_X(0) = 0, \quad C_X'(0) = \mathbb{E}(X), \quad C_X''(0) = \mathrm{Var}(X). \tag{A.3}$$

Alrededor de una vecindad de cero se tiene la expansión

$$C_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{i!} t^i.$$

Los c_i son llamados **cumulantes** de X.

Se cumple que

$$c_3 = \mathbb{E}\left(X^3\right) \quad \text{y} \quad c_4 = \mathbb{E}\left(X^4\right) - 3\mathbb{E}^2\left(X^2\right). \tag{A.4}$$

A.1 Estimador de Desviaciones Grandes

Sea Y una variable aleatoria simple con valores $y_1, \ldots, y_l$, tal que

$$\mathbb{E}(Y) < 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(Y > 0) > 0. \tag{A.5}$$

Tenemos que $M_Y'(t) < 0$ y $M_Y(t) \overset{t \to \infty}{\to} \infty$, por $(A.5)$. Como

$$M_Y''(t) = \sum_{i=1}^{l} y_i^2 \mathbb{P}(Y = y_i) e^{ty_i} > 0,$$

entonces $M_Y(t)$ es convexa y por consiguiente, alcanza su mínimo, digamos ρ, en $\tau > 0$. Es decir,

$$\inf_t M_Y(t) = M_Y(\tau) = \rho, \quad \rho \in (0,1), \quad \tau > 0. \tag{A.6}$$

Sea Z una variable aleatoria discreta con densidad

$$\mathbb{P}(Z = y_i) = \frac{e^{\tau y_i}}{\rho} \mathbb{P}(Y = y_i). \tag{A.7}$$

La fgm de Z es entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{tZ}\right) &= \sum_j e^{ty_i} \frac{e^{\tau y_i}}{\rho} \mathbb{P}(Y = y_i) \qquad \text{(A.8)} \\ &= \frac{M_Y(\tau + t)}{\rho}. \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{M_Y'(\tau)}{\rho} = 0, \quad s^2 := \mathbb{E}\left(Z^2\right) = \frac{M_Y''(\tau)}{\rho} > 0. \tag{A.9}$$

Tenemos que, por la desigualdad de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq 0) &= \mathbb{P}\left(e^{tY} \geq 1\right) \\ &\leq M_Y(t) \\ &\leq \rho. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Sea θ tal que

$$\rho e^{-\theta} = \mathbb{P}(Y \geq 0) = \sum_{j:\ y_j \geq 0} \mathbb{P}(Y = y_j) = \rho \sum_{j:\ y_j \geq 0} e^{-\tau y_j} \mathbb{P}(Z = y_j). \tag{A.11}$$

Sea $p = \mathbb{P}(Z \geq 0)$. Observemos que $\theta \geq 0$, por $(A.10)$. Como $\log x$ es convexa, entonces la desigualdad de Jensen nos dice que

$$\begin{aligned} -\theta &= \log \sum_{j:\ y_j \geq 0} e^{-\tau y_j} p^{-1} \mathbb{P}(Z = y_j) + \log p \\ &\geq \sum_{j:\ y_j \geq 0} -(\tau y_j) p^{-1} \mathbb{P}(Z = y_j) + \log p \\ &= -\tau s p^{-1} \sum_{j:\ y_j \geq 0} \frac{y_j}{s} \mathbb{P}(Z = y_j) + \log p. \end{aligned}$$

La desigualdad de Hölder y $(A.9)$ nos dan

$$\begin{aligned} \sum_{j:\ y_j \geq 0} \frac{y_j}{s} \mathbb{P}(Z = y_j) &\leq \frac{1}{s} \mathbb{E}(|Z|) \\ &\leq \frac{1}{s} \mathbb{E}^{1/2}\left(Z^2\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que

$$0 \leq \theta \leq \frac{\tau s}{\mathbb{P}(Z \geq 0)} - \log \mathbb{P}(Z \geq 0). \tag{A.12}$$

Entonces hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema A.2 *Sea Y una variable aleatoria simple que satisface $(A.5)$. Defina ρ y τ por $(A.6)$, sea Z una variable aleatoria con distribución $(A.7)$ y defina s^2 por $(A.9)$. Entonces $\mathbb{P}(Y \geq 0) = \rho e^{-\theta}$, donde θ es un número que satisface $(A.12)$.*

Para que $(A.12)$ tenga sentido, $\mathbb{P}(Z \geq 0)$ necesita una cota inferior. El siguiente resultado nos da una cota.

Teorema A.3 *Si* $\mathbb{E}(Z) = 0$, $\mathbb{E}(Z^2) = s^2$, *y* $\mathbb{E}(Z^4) = \xi^4 > 0$, *entonces*

$$\mathbb{P}(Z \geq 0) \geq \frac{s^4}{4\xi^4}.$$

Demostración. Tenemos que

$$s^2 = \mathbb{E}\left[\left(Z^+\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(Z^-\right)^2\right]. \tag{A.13}$$

Si $p = \mathbb{P}(Z \geq 0)$, la desigualdad de Schwarz nos dice que

$$\mathbb{E}\left[\left(Z^+\right)^2\right] \leq \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left[\left(\mathbf{1}_{[Z\geq 0]}\right)^2\right] \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left(Z^4\right) = p^{1/2}\xi^2.$$

Ahora, por la desigualdad de Hölder,

$$\mathbb{E}\left[\left(Z^-\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(Z^-\right)^{2/3}\left(Z^-\right)^{4/3}\right] \leq \mathbb{E}^{2/3}\left(Z^-\right)\mathbb{E}^{1/3}\left[\left(Z^-\right)^4\right] \leq \mathbb{E}^{2/3}\left(Z^-\right)\xi^{4/3}.$$

Como $\mathbb{E}(Z) = 0$, la desigualdad de Hölder nos dice que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Z^-\right) &= \mathbb{E}\left(Z^+\right) = \mathbb{E}\left(Z \cdot \mathbf{1}_{[Z\geq 0]}\right) \\ &\leq \mathbb{E}^{1/4}\left(Z^4\right)\mathbb{E}^{3/4}\left(1_{[Z\geq 0]}^{4/3}\right) = \xi p^{3/4}. \end{aligned}$$

De esta forma, $(A.13)$ y las desigualdades anteriores nos dan

$$s^2 \leq p^{1/2}\xi^2 + \left(\xi p^{3/4}\right)^{2/3}\xi^{4/3} = 2p^{1/2}\xi^2.$$

■

Lema A.1 *Si* $(a_n)_n$ *es una sucesión tal que*

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}} \to \infty \quad y \quad a_n \to \infty, \tag{A.14}$$

entonces existe una sucesión $(\xi_n)_n$ *tal que* $\xi_n \to 0$ *y*

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq a_n\sqrt{n}\right) = e^{-a_n^2(1+\xi_n)/2}. \tag{A.15}$$

Demostración. Sea $Y_n = S_n - a_n\sqrt{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(X_k - a_n/\sqrt{n}\right)$. Entonces $\mathbb{E}\left(Y_n\right) < 0$ y aplica el Teorema A.2. Sean $M_n\left(t\right)$, ρ_n, τ_n y Z_n asociados a Y_n como en el Teorema A.2. Si $m\left(t\right)$ y $c\left(t\right)$ son la fgm y la fgc de X_n,

$$\begin{aligned} M_n\left(t\right) &= \mathbb{E}\left(e^{tY_n}\right) = e^{-a_n\sqrt{n}t}m^n\left(t\right) \quad \text{(por } (A.2)\text{ .)} \\ &= \left[e^{-at/\sqrt{n}}m\left(t\right)\right]^n. \end{aligned}$$

Entonces

$$C_n\left(t\right) = -at\sqrt{n} + n\,c\left(t\right). \tag{A.16}$$

Como τ_n es mínimo global de $C_n\left(t\right)$,

$$c'\left(\tau_n\right) = \frac{a_n}{\sqrt{n}},$$

pues

$$C_n'\left(t\right) = -a\sqrt{n} + n\,c'\left(t\right).$$

Por $(A.3)$,

$$c\left(0\right) = 0, \quad c'\left(0\right) = 0, \quad c''\left(0\right) = 1. \tag{A.17}$$

Además, $c'\left(t\right)$ es creciente debido a que $c\left(t\right)$ es convexa, y como $c'\left(\tau_n\right) = a_n/\sqrt{n} \to 0$, $\tau_n \to 0$. Ahora, por la expansión de Taylor, $a_n/\sqrt{n} = c'\left(\tau_n\right) = \tau_n + O\left(\tau_n^2\right),$

$$\tau_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{a_n^2}{n}\right) \tag{A.18}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \log\rho_n &= C_n\left(\tau_n\right) = -\tau_n a_n\sqrt{n} + n\,c\left(\tau_n\right) \qquad \text{(A.19)} \\ &= -\tau_n a_n\sqrt{n} + n\left[\frac{\tau_n^2}{2} + O\left(\tau_n^3\right)\right], \end{aligned}$$

por el desarrollo de Taylor de tercer orden. Al reemplazar $(A.18)$ en $(A.19)$ obtenemos

$$\log\rho_n = -\frac{a_n^2}{2} + o\left(a_n^2\right).$$

La variable aleatoria Z_n tiene fgm $M_n(\tau_n + t)/\rho_n$, por $(A.8)$ y fgc

$$\begin{aligned} D_n(t) &= C_n(\tau_n + t) - \log \rho_n \\ &= -(\tau_n + t) a_n \sqrt{n} + n\, c(t + \tau_n) - \log \rho_n, \end{aligned}$$

por $(A.16)$. La media de Z_n es $D_n'(0) = 0$ y su varianza $D_n''(0)$, entonces

$$s_n^2 = n\, c''(\tau_n) = n\left[c_n''(0) + O(\tau_n)\right] = n\,(1 + o(1)), \tag{A.20}$$

por $(A.17)$.

El cuarto cumulante de Z_n es $D_n^{(4)}(0) = n\, c^{(4)}(\tau_n) = O(n)$. Por $(A.4)$,

$$\mathbb{E}\left(Z_n^4\right) = 3s_n^4 + D_n^{(4)}(0).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\mathbb{E}\left(Z_n^4\right)}{s_n^4} \to 3,$$

y, por el Teorema A.3, existe un α tal que

$$\mathbb{P}(Z_n \geq 0) \geq \alpha > 0,$$

si n es suficientemente grande.

Por el Teorema A.2, $\mathbb{P}(Y_n \geq 0) = \rho_n e^{-\theta_n}$, con $\theta_n \in [0,\, \tau_n s_n \alpha^{-1} + \log \alpha]$. Por $(A.14)$, $(A.18)$ y $(A.20)$, $\theta_n = O(a_n) = o(a_n^2)$ y entonces

$$\mathbb{P}(Y_n \geq 0) = e^{-a_n^2[1+o(1)]/2},$$

por $(A.19)$. ■

Lema A.2 *Para cada $\alpha \geq \sqrt{2}$, se cumple que*

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha\right) \leq 2\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha - \sqrt{2}\right).$$

Demostración. Si $A_n = [-M_{j-1} < \alpha\sqrt{n} \leq M_j]$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha - \sqrt{2}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_j \bigcap \left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \alpha - \sqrt{2}\right]\right).$$

Como $\text{Var}(S_n - S_j) = n - j$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_j \bigcap \left[\frac{|S_n - S_j|}{\sqrt{n}}\right] > 2\right) &= \mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}\left(\frac{|S_n - S_j|}{\sqrt{n}} > 2\right) \quad \text{(independencia)} \\
&= \mathbb{P}(A_j)\,\frac{n-j}{2n} \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_j) \quad \text{(desigualdad de Chebyshev)}
\end{aligned}$$

Como $\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \subset [M_n \geq \alpha\sqrt{n}]$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha\right),$$

de donde se sigue el resultado. ■

A.2 Demostración de la LLI

Demostración del Teorema A.1. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2n\log\log n}\ i.v.\right) = 0 \tag{A.21}$$

y

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2n\log\log n}\ i.v.\right) = 1, \tag{A.22}$$

es equivalente a demostrar $(A.1)$. Donde $i.v.$ significa 'infinitas veces'. Formalmente, si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, entonces

$$\mathbb{P}(A_n\ i.v.) = \mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right).$$

Sea $f(n) = \sqrt{2n\log\log n}$, para cada n y $\varepsilon > 0$.

Primero demostramos $(A.21)$. Sea θ un número tal que $\theta > 1$ y $\theta^2 < 1+\varepsilon$. Sea $n_k = \lfloor\theta^k\rfloor$ y $x_k = \theta\sqrt{2\log\log n_k}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{M_{n_k}}{\sqrt{n_k}} \geq x_k\right) &\leq 2\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq x_k - \sqrt{2}\right) \quad \text{(Lema A.2)} \\
&= 2\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_k - \sqrt{2}\right)^2(1+\xi_k)\right). \quad \text{(Lema A.1)}
\end{aligned}$$

Ahora, observamos que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(x_k-\sqrt{2}\right)^2(1+\xi_k)}{\theta^2\log k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\theta^2 2\log\log n_k}{2\theta^2\log k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\log\log\theta^k}{\log k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\log k+\log\log\theta}{\log k} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_k-\sqrt{2}\right)^2(1+\xi_k)\right)}{k^{-\theta}} = 1.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[M_{n_k} \geq \theta\, f\left(n_k\right)\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_{n_k}}{\sqrt{n_k}} \geq x_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_k-\sqrt{2}\right)^2(1+\xi_k)\right) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pues

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k^{-\theta} < \infty.$$

Ahora, por el primer lema de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left[S_{n_k} \geq (1+\varepsilon)\ f\left(n_k\right)\ \ i.v.\right] = 0. \tag{A.23}$$

Suponga ahora que $n_k < n \leq n_{k-1}$ y que

$$S_n > (1+\varepsilon)\, f\left(n\right). \tag{A.24}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{f\left(n_{k-1}\right)}{\theta^{-1/2} f\left(n_k\right)} &= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2\theta^{k-1}\log\log\theta^{k-1}}{2\theta^k\log\log\theta^k/\theta}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{\log\log\theta^{k-1}}{\log\log\theta^k}} = 1,
\end{aligned}$$

y que $f(n) \geq f(n_{k-1})$, entonces, por la elección de θ, $(1+\varepsilon) f(n) > \theta f(n_k)$, si k es suficientemente grande. Como $(A.24)$ implica $S_{n_{k-1}} \geq (1+\varepsilon)\ f(n_{k-1})$, por $(A.23)$, tenemos que

$$\mathbb{P}\left[S_n \geq (1+\varepsilon)\ f(n)\ \ i.v.\right] = 0,$$

por lo que hemos demostrado $(A.21)$.

Para demostrar ahora $(A.22)$, tomemos θ en los enteros tal que $3\theta^{-1/2} < \varepsilon$. Sea $n_k = \theta^k$. Observemos que $(n_k - n_{k-1}) \to \infty$. Entonces tomamos $n = (n_k - n_{k-1})$ y $a_n = x_k / \sqrt{n_k - n_{k-1}}$ en $(A.15)$, donde $x_k = \left(1-\theta^{-1}\right) f(n_k)$. Obtenemos que

$$\mathbb{P}\left(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geq x_k\right) = \mathbb{P}\left(S_{n_k - n_{k-1}} \geq x_k\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x_k^2}{n_k - n_{k-1}}(1+\xi_k)\right].$$

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{x_k^2}{n_k-n_{k-1}}(1+\xi_k)}{\left(1-\theta^{-1}\right)\log k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\left(1-\theta^{-1}\right)^2 (2n_k \log\log n_k)(1+\xi_k)}{2\left(1-\theta^{-1}\right)(n_k - n_{k-1})\log k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\left(1-\theta^{-1}\right)\left(\theta^k \log\log \theta^k\right)}{\theta^k\left(1-\theta^{-1}\right)\log k} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

entonces para k suficientemente grande,

$$\frac{1}{2}\frac{x_k^2}{n_k - n_{k-1}}(1+\xi_k) < \log k.$$

En tal caso, $\mathbb{P}\left(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geq x_k\right) \geq 1$. Entonces el segundo lema de Borel-Cantelli nos dice que

$$\mathbb{P}\left(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geq x_k\ i.v.\right) = 1.$$

Por otro lado, al aplicar $(A.21)$ a $(-X_n)_n$, tenemos que con probabilidad uno

$$-S_{n_{k-1}} \leq 2f(n_{k-1}) \leq 2\theta^{-1/2},$$

para finitas k. Entonces

$$S_{n_k} \geq x_k - 2\theta^{-1/2} f(n_k) > (1-\varepsilon) f(n_k),$$

por la elección de θ. Entonces se cumple $(A.22)$. ■

Apéndice B

Teorema del Límite Central Casi Seguro

El Teorema 3.2, que usamos en el Capítulo 3 para proponer otra definición de números normales, es un caso particular de un TLC con convergencia casi segura estudiado por Schatte [24, Teorema 1]. A continuación enunciamos dicho teorema y damos las ideas principales de la demostración, para la cual se usan la desigualdad de Chebyshev, los lemas de Borel-Cantelli y la LLI.

En lo que sigue, $(X_n)_n$ será una sucesión de v.a.i.i.d. con media cero y varianza uno, definidas sobre un espacio de probabilidad arbitrario $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$. Sea

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

la función de distribución de una variable aleatoria con distribución normal estándar.

Teorema B.1 *Sea $a(x)$ una función real y continua casi seguramente tal que*

$$|a(x)| \leq e^{\gamma x^2}, \tag{B.1}$$

para algún $\gamma < 1/4$. Si existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}|X_1|^{2+\delta}$, entonces

$$\mathbb{P}\left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} a\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, d\Phi(x)\right] = 1. \tag{B.2}$$

Demostración (bosquejo). Primero se demuestra $(B.2)$ para $a(x) = \mathbf{1}_{(-\infty,\, x)}(x)$ y X_1 con distribución normal estándar. Para este paso se usa la desigualdad de Chebyshev y el primer lema de Borel-Cantelli para mostrar que

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\mathbf{1}_{(-\infty,u)}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(u)\right] = 0\right\} = 1.$$

Ahora, para el caso cuando X_1 no necesariamente tiene distribución normal estándar, se usa un estimador de la diferencia $S_n - W_n$, donde W_n es la suma de n v.a.i.i.d. con distribución normal estándar.

El siguiente paso es demostrar $(B.2)$ para $a(x) = e^{\gamma x^2}$, con $\gamma < 1/4$. Como en el paso anterior, usando la desigualdad de Chebyshev y el primer lema de Borel-Cantelli, más una aplicación de la LLI, se demuestra que

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\exp\left(\gamma \frac{S_n^2}{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-2\gamma}}\right] = 0\right\} = 1,$$

para el caso en que X_1 es normal estándar. Para generalizarlo a X_1 no necesariamente normal, se usa nuevamente un estimador de la diferencia $S_n - W_n$ y se aplica nuevamente la LLI.

Finalmente, por medio de aproximaciones por funciones simples y usando los primeros dos pasos se llega a que, casi seguramente,

$$\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} a\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \leq \int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, d\Phi(x) + \varepsilon.$$

Reemplazando $a(x)$ por $-a(x)$ se obtiene el resultado. ∎

Bibliografía

[1] Bailey, D., Borwein, P. & Plouffe, S. (1997). On the rapid computation of various polylogarithmic constants. *Mathematics of Computation*, **Vol. 66**, núm. 218, págs 903–913.

[2] Bailey, D. & Crandall, R. (2001). On the random character of fundamental constant expansions. *Experimental Mathematics,* **Vol. 10**, núm. 2, págs. 175-190.

[3] Bailey, D. & Crandall, R. (2002). Random generators and normal numbers. *Experimental Mathematics,* **Vol. 11**, núm. 4, págs. 527-546.

[4] A. Belshaw, J. (2005). *On the Normality of Numbers.* Tesis de Maestría. Simon Fraser University. Canadá.

[5] Belshaw, A. & Borwein, P. (2006). Strong Normality of Numbers. Manuscrito.

[6] Billinsley, P (1986). *Probability and Measure.* Segunda Edición. John Wiley & Sons Inc.

[7] Bingham, N. H. (1986). Variants on the law of the iterated logarithm. *Bulletin of the London Mathematical Society,* **Vol. 18**, núm. 5, págs. 433-467.

[8] Borel, É. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* **Vol. 27**, págs. 247-271.

[9] Borel, É. (1950). Sur les chiffres de $\sqrt{2}$ et divers problemés de probabilités en chaîne. *Les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris,* **Vol. 230**, págs. 591-593.

[10] Champernowne, D.G. (1933). The construction of decimals normal in the scale of ten. *Journal of the London Mathematical Society.* **Vol. 8**, págs. 254-260.

[11] Copeland, A. & Erdös, P. (1946). Note on normal numbers. *Bulletin American Mathematical Society,* **Vol. 52**, págs. 857-860.

[12] Figueira, S. (2006). *Aspects of Randomness.* Tesis doctoral. Universidad de Buenos Aires. Argentina.

[13] Hanson, H. (1954). Some relations between various types of normality of numbers. *Canadian Journal of Mathematics.* **Vol. 6**, núm. 4, págs. 477-485.

[14] Harman, G. (1998). *Metric Number Theory.* London Mathematical Society Monographs, **Vol.18**, Oxford University Press.

[15] Harman, G. (2002). One hundred years of normal numbers. M.A. Bennett, B.C. Brendt, N. Boston, H.G. Diamond, A.J. Hildebrand, W. Philipp (Eds.), *Millennial Conference on Number Theory, Number Theory for the Millennium*, **Vol. 2**, A. K. Peters, págs. 149–166.

[16] Kac, M. (1959). *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory.* New York, Wiley.

[17] Khoshnevisan, D. (2006). On the normality of normal numbers*. Clay Mathematics Institute Annual Report 2006*, pág. 15 (continúa en págs. 27-31).

[18] Kolmogorov, A. (1956). *Foundations of the Theory of Probability.* Chelsea Publishing Company. New York.

[19] Lesigne, E. (2005). *Heads or Tails: An Introduction to Limit Theorems in Probability.* American Mathematical Society.

[20] Niven, I. & Zuckerman, H. (1951). On the definition of normal numbers. *Pacific Journal of Mathematics*, **Vol. 1** , págs. 103-110.

[21] Pellegrino, D. (2008). Normal numbers from Steinhaus' viewpoint. Manuscrito.

[22] Pincus, S. & Kalman, R. (1997). Not all (possibly) "random" sequences are created equal. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **Vol. 94**, págs. 3513-3518.

[23] Queffélec, M. (2006). Old and new results on normality. *Lecture Notes-Monograph Series, Dynamics & Stochastics*, **Vol. 48**, págs. 225-236.

[24] Schatte, P. (1990). On the central limit theorem with almost sure convergence. *Probability and Mathematical Statistics*, **Vol. 2**, núm. 2, págs. 237-246.

[25] Schiffer, J. (1986). Discrepancy of normal numbers. *Acta Arithmetica,* **Vol. 47**, págs. 175-186.

[26] Schmidt, W. (1960). On normal numbers. *Pacific Journal of Mathematics,* **Vol. 10**, núm. 2, 661-672.

[27] Sierpinski, W. (1917). Démonstration élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'une tel nombre. *Bulletin de la Société Mathématique de France,* **Vol. 45**, págs. 125-132.

[28] Wall, D. (1949). *Normal Numbers.* Tesis doctoral. Universidad de California en Berkeley. EUA.