Probabilidad

Agosto-diciembre 2010

Tarea No. 3

Fecha de entrega: ***jueves 26 de agosto del 2010*** **a las 11 horas**

1. Recordemos que una variable aleatoria N tiene distribución de Poisson si
$$P(N = k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!, \quad k = 0, 1, 2, ...$$
   (a) Encuentre la media y la varianza de la distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$.
   (b) Interprete el resultado anterior. ¿Puede construir otra distribución con esta propiedad?. ¿Cuál es la interpretación de λ?.
   (c) En un proceso de encuadernación de libros se sabe que 1% de los libros tienen encuadernaciones defectuosas. Un lote de libros se rechaza si en una muestra de 50 libros se encuentra que más de 2 libros tienen encuadernaciones defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar un lote de libros?

2. Para éste y los problemas 3-7, sean $0 < p < 1$, y $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito p. Consideremos la variable aleatoria
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$
   (a) Encuentre $\mathrm{E}(S_n)$ y $\mathrm{Var}(S_n)$
   (b) Supongamos que un motor de un avión falla, durante el vuelo, con probabilidad $1 - p$ independientemente de los otros motores. El avión tiene un vuelo exitoso si al menos 50% de sus motores permanecen operando. Estamos interesados en determinar cuáles son los valores de p, que hacen preferible un avión de 4 motores a uno de 2 motores.

3. Consideremos las variables aleatorias
$$\begin{aligned} W &= \min\{i \geq 1 : \xi_i = 1\}, \\ G &= W - 1. \end{aligned}$$
   (a) ¿Cuáles son las distribuciones de G y W.?
   (b) Encuentre la media y la varianza de G y W. De una interpretación de la media de G y W.
   (c) En un proceso de producción es usual suponer que el proceso se tiene bajo control de calidad si una característica que se mide sigue una distribución normal con media cero y varianza uno. Se produce una alarma en el proceso de producción cuando esta característica se encuentra fuera del intervalo $(-3, 3)$ por lo que se tiene que revisar el proceso. Esta alarma puede ser falsa, cuando el dato se encuentra dentro de la variabilidad natural de la distribución normal considerada, o bien la alarma es real, cuando existe una falla en el sistema de producción. ¿Cuál es el número esperado de falsas alarmas?

4. Propiedad de pérdida de memoria de la distribución geométrica.

   (a) Sea G una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro $0 < p < 1$. Pruebe que para cualesquiera dos enteros nonegativos m y n
   $$P(G > m+n | \, G > m) = P(G \geq n).$$

   (b) La propiedad de pérdida de memoria de la distribución geométrica es una característica de esta distribución entre las distribuciones discretas. Formule este resultado en términos matemáticos precisos y pruébelo.

5. Sea Y el número de fallas antes del primer éxito. Pruebe que la probabilidad condicional de Y dado que $S_n = 1$ es uniforme en $\{0, 1, ..., n-1\}$. Interprete este resultado y observe que la distribución no depende de p.

6. Sean $G_1, ..., G_n$ variables aleatorias independientes cada una con distribución Geométrica de parámetro p.

   (a) ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria $Y = \min(G_1, ..., G_n)$.

   (b) Interprete el resultado y de ejemplos.

   (c) Un sistema consta de n componentes, cada uno se puede modelar como una sucesión de ensayos Bernoulli de parámetro p independiente de los otros componentes. El sistema falla si al menos uno de estos ensayos registra un éxito. Encuentre la distribución del tiempo de falla del sistema. ¿Cuál es la diferencia con el problema 6(a)?

7. Sea $r = 1, 2, ...$y consideremos las variables aleatorias
   $$\begin{aligned} R_r &= \min\{i \geq 1 : S_i = r\} \\ T_r &= R_r - r. \end{aligned}$$

   (a) ¿Cuáles son las distribuciones de R_r y T_r.?

   (b) ¿Por qué R_n es la suma de r variables aleatorias con distribución geométrica con el mismo parámetro p?. Argumente.

   (c) Usando el resultado (b), encuentre la media y la varianza de R_r y T_r. Interprete la media de estas distribuciones.

8. Una vacuna para desensibilizar a los pacientes vulnerables a las picaduras de una abeja se empaca con tres ampolletas en cada caja. La potencia de cada ampolleta se verifica antes de empacarla. La probabilidad de que una ampolleta cumpla con las especificaciones es de 0.9. Sea X el número de ampolletas que deben inspeccionarse para llenar una caja.

   (a) ¿Cuál es el número esperado de ampolletas a inspeccionar? ¿Por qué?

   (b) ¿Sorprendería que fuera necesario someter a prueba siete o más ampolletas para obtener tres que satisfagan las especificaciones? ¿Por qué?

9. Elabore un ensayo que incluya las biografías de Poisson, Markov y Chebyshev. Siga algunas de las instrucciones que se dieron en la Tarea 1.