

Soluciones¹ a Lista de Problemas de teoría de números

1.- Demostrar que $30 \mid n^5 - n$.

Solución: Notemos que $n^5 - n = n(n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)$, ya sabemos que $6 \mid (n - 1)n(n + 1)$, por ser el producto de tres números consecutivos, basta demostrar que $5 \mid n(n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)$; ahora n puede ser de la forma: $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$.

Caso 1: $n = 5k \Rightarrow 5 \mid n$ (ya que $(5k) = 5 \cdot k) \Rightarrow 5 \mid n^5 - n$.

Caso 2: $n = 5k + 1 \Rightarrow 5 \mid n - 1$ (ya que $(5k + 1) - 1 = 5 \cdot k) \Rightarrow 5 \mid n^5 - n$.

Caso 3: $n = 5k + 2 \Rightarrow 5 \mid n^2 + 1$ (ya que $(5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1) \Rightarrow 5 \mid n^5 - n$).

Caso 4: $n = 5k + 3 \Rightarrow 5 \mid n^2 + 1$ (ya que $(5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2) \Rightarrow 5 \mid n^5 - n$).

Caso 5: $n = 5k + 4 \Rightarrow 5 \mid n + 1$ (ya que $(5k + 4) + 1 = 5(k + 1) \Rightarrow 5 \mid n^5 - n$).

$\therefore 30 \mid n^5 - n$ ■

2.- Probar que si x y y son enteros impares, entonces $x^2 + y^2$ es par, pero no es divisible entre 4.

Solución: x y y impares $\Rightarrow x = 2r + 1$ para algún $r \in \mathbb{Z}$ y $y = 2s + 1$ para algún $s \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow x^2 + y^2 = (2r + 1)^2 + (2s + 1)^2 = 4(r^2 + s^2 + r + s) + 2$
 $\therefore 2 \mid x^2 + y^2$, pero $4 \nmid x^2 + y^2$ ■

3.- Probar que el cuadrado de cualquier entero es de la forma $3k$ o bien $3k + 1$, pero no de la forma $3k + 2$.

Solución: Sea $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n$ es de la forma: $3r, 3r + 1$ o bien $3r + 2$.

Caso 1: $n = 3r \Rightarrow n^2 = 9r^2 = 3(3r^2) = 3k$.

Caso 2: $n = 3r + 1 \Rightarrow n^2 = 9r^2 + 6r + 1 = 3(3r^2 + 2r) + 1 = 3k + 1$.

Caso 3: $n = 3r + 2 \Rightarrow n^2 = 9r^2 + 12r + 4 = 3(3r^2 + 4r) + 1 = 3k + 1$.

$\therefore$ el cuadrado de cualquier entero es de la forma $3k$ o bien $3k + 1$, pero no de la forma $3k + 2$ ■

4.- Probar que si n es impar, entonces $8 \mid n^2 - 1$.

Solución: Sea $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ (impares) $\Rightarrow n$ es de la forma: $4k + 1$ o $4k + 3$.

Caso 1: $n = 4k + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = (4k + 1)^2 - 1 = 16k^2 + 8k = 8(2k^2 + k) \Rightarrow 8 \mid n^2 - 1$.

¹Cualquier comentario respecto a las soluciones a José Luis Alonzo Velázquez

Caso 2: $n = 4k+3 \Rightarrow n^2-1 = (4k+3)^2-1 = 16k^2+24k+8 = 8(2k^2+3k+1) \Rightarrow 8 \mid n^2-1$.

$$\therefore 8 \mid n^2 - 1 \blacksquare$$

5.- Sean m, a, b enteros cualesquiera, probar que $(ma, mb) = m \cdot (a, b)$

Solución: Sean $g = (ma, mb)$ y $d = (a, b)$, entonces tenemos tres posibilidades $g < md$, $g = md$ o $g > md$, veamos que la primera y la última no pueden ocurrir.

Caso 1: $g < md$, notemos que $\frac{ma}{md} = \frac{a}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow md \mid ma$, $\frac{mb}{md} = \frac{b}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow md \mid mb$, $\therefore md$ es un divisor de ma y mb más grande que g , pero g era el más grande contradicción !

Caso 2: $g > md$, esto implica que $\frac{g}{m}^2 > d$, notemos que $\frac{a}{\frac{g}{m}} = \frac{ma}{g} \in \mathbb{Z} \Rightarrow g \mid ma$, $\frac{b}{\frac{g}{m}} = \frac{mb}{g} \in \mathbb{Z} \Rightarrow g \mid mb$, $\therefore \frac{g}{m}$ es un divisor de a y b más grande que d , pero d era el más grande contradicción !

$$\therefore (ma, mb) = m \cdot (a, b) \blacksquare$$

²Nota: $\frac{g}{m} \in \mathbb{Z}$, ya que $m \mid ma$ y $m \mid mb$, $\Rightarrow m \mid (ma, mb)$, esto hay que notarlo, ya que en principio no sabemos si el cociente es un entero.