Soluciones¹ a Lista de Problemas de teoría de números

1.- Dados los números $A = 23 \cdot 310 \cdot 5 \cdot 72$ y $B = 25 \cdot 3 \cdot 11$, encuentre (A,B).

Solución: $A = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 31$ y $B = 3 \cdot 5^2 \cdot 11$, $\Rightarrow (A,B) = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11^0 \cdot 23^0 \cdot 31^0 = 75 \square$

2.- Dados los números $A = 28 \cdot 53 \cdot 7$ y $B = 25 \cdot 3 \cdot 57$, encuentre [A,B].

Solución: $A = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 53$ y $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 19$, $\Rightarrow [A,B] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 53 \square$

3.- Dados dos números primos distintos p y q, encuentre el número de diferentes divisores positivos de:

a) pq b) p^2q c) p^2q^2 d) p^nq^m

Solución: Dado el número a , cuya factorización canónica es $a = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n}$, $\Rightarrow$ la cantidad de divisores positivos de a es igual a

$$\prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$$

$\Rightarrow$ la cantidad de divisores de pq es 4, la de p^2q es 6, la de p^2q^2 es 9 y la de p^nq^m es $(n+1)(m+1) \square$

4.- Pruebe que el producto de cualesquiera cinco números naturales consecutivos es:

- a) divisible por 30
- b) divisible por 120

Solución: Solucionaremos el inciso b), ya que este implica a). Ya sabemos que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 3, y podemos usar un argumento similar para 5. Entonces basta probar que 8 divide al producto de 5 enteros consecutivos.

El producto de 5 enteros consecutivos lo podemos escribir de la siguiente forma $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, ahora n puede ser de la forma: $4k$, $4k+1$, $4k+2$ o $4k+3$.

Caso 1: $n = 4k \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = (4k-2)(4k-1)4k(4k+1)(4k+2) = 8(2k-1)(4k-1)k(4k+1)(4k+2)$.

Caso 2: $n = 4k+1 \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = (4k-1)4k(4k+1)(4k+2)(4k+3) = 8(4k-1)k(4k+1)2(2k+1)(4k+3)$.

¹Cualquier comentario respecto a las soluciones a José Luis Alonzo Velázquez

Caso 3: $n = 4k + 2 \Rightarrow (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) = 4k(4k + 1)(4k + 2)(4k + 3)(4k + 4) = 8k(4k + 1)(2k + 1)(4k + 3)(4k + 4)$.

Caso 4: $n = 4k + 3 \Rightarrow (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) = (4k + 1)(4k + 2)(4k + 3)(4k + 4)(4k + 5) = 8(4k + 1)(2k + 1)(4k + 3)(k + 1)(4k + 5)$.

Por lo tanto $120 \mid (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) \Rightarrow 30 \mid (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$, así tenemos a) y b) $\square$

5.- Encuentre el menor número natural n tal que $n!$ es divisible por 990.

Solución: $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, por lo tanto 11 debe estar como factor, lo que implica que 11, es el menor entero positivo tal que $990 \mid n!$ $\square$

6.- ¿Cuántos ceros hay al final de la representación decimal del número $100!$?

Solución: Esta pregunta es equivalente a saber cuántos cinco hay en $100!$, ya que por cada 5 habrá un cero. Ahora hay $\frac{100}{5}$ múltiplos de 5 entre el 1 y el 100, hay $\frac{100}{25}$ múltiplos de 25 entre el 1 y el 100 $\Rightarrow$ que hay 24 ceros en $100!$ $\square$

7.- Pruebe que si un número tiene un número impar de divisores, entonces éste es un cuadrado perfecto.

Solución: Dado el número a , cuya factorización canónica es $a = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n}$, $\Rightarrow$ la cantidad de divisores positivos de a es igual a

$$\prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$$

si este número es impar quiere decir que $a = P_1^{2\beta_1} \cdot P_2^{2\beta_2} \cdot \dots \cdot P_n^{2\beta_n} = (P_1^{\beta_1} \cdot P_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot P_n^{\beta_n})^2 \therefore a$ es un cuadrado perfecto $\square$

8.- ¿Puede un número escrito con cien 0s, cien 1s, y cien 2s ser un cuadrado perfecto?

Solución: Sea n tal número $\Rightarrow 3 \mid n$, ya que la suma de sus dígitos es múltiplo de 3, pero $9 \nmid n$, ya que la suma de sus dígitos no es múltiplo de 9. $\therefore$ no es un cuadrado perfecto $\square$.

9.- Encuentre todas las soluciones en números naturales de las ecuaciones:

$$a) x^2 - y^2 = 31$$

$$b) x^2 - y^2 = 303$$

Solución:

a) $x^2 - y^2 = 31 \Rightarrow (x + y)(x - y) = 1 \cdot 31$ o $(x + y)(x - y) = (-1) \cdot (-31)$ entonces hay que resolver el sistema $x + y = 31, x - y = 1 \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16$ y $y = 15$ y el sistema $x + y = -31, x - y = -1 \Rightarrow 2x = -32 \Rightarrow x = -16$ y $y = -15$, cualquier otro sistema es equivalente a los propuestos $\therefore$ la única solución es $(x, y) = (16, 15)$.

b) El algoritmo para resolver este, es muy similar al de a) así que con esto ya pueden resolver el segundo ejercicio $\square$

10.- Hallar un cuadrado de la forma $aabb$.

Solución: 7744

11.- Si a y b son números positivos distintos que cumplen $a^2 + b^2 = 4ab$, hallar el valor de

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

$$\text{Solución: } \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{4ab+2ab}{4ab-2ab} = \frac{6ab}{2ab} = 3 \quad \square$$