Soluciones[1] a Lista de Problemas de teoría de números

1.- Si p, $4p^2+1$ y $6p^2+1$ son primos, encuentra p.

Solución: $p=5$ Solo falta ver que es el único, supongamos que existe otro, entonces p tiene residuo 1,2,3 o bien 4 módulo 5, si tuviera residuo 0, sería múltiplo de 5, y ya no sería primo.

Si $p \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 4p^2+1 \equiv 0 (\mod 5)$, contradiciendo el hecho de que sea primo.

Si $p \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow 6p^2+1 \equiv 0 (\mod 5)$, contradiciendo el hecho de que sea primo.

Si $p \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow 6p^2+1 \equiv 0 (\mod 5)$, contradiciendo el hecho de que sea primo.

Si $p \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 4p^2+1 \equiv 0 (\mod 5)$, contradiciendo el hecho de que sea primo.

Por lo tanto solo existe un primo p tal que $4p^2+1$ y $6p^2+1$ son primos$\square$

2.- Encuentra el residuo de 3^{2006} cuando lo divides entre 7.

Solución: $3 \equiv 3(mod 7)$, $3^2 \equiv 2(mod 7)$, $3^3 \equiv -1(mod 7)$, $3^4 \equiv 1(mod 7)$, $2006 \equiv 2(mod 4) \Rightarrow 3^{2006} \equiv 3^{2004} \cdot 3^2 \equiv 3^0 \cdot 3^2 \equiv 2(mod 7) \square$

3.- Prueba que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es divisible entre 7.

Solución: No temos que:

$$2222^{5555}+5555^{2222} = (2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222})$$

ya que es sumar y restar lo mismo y que $1111 \equiv 11(101) \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow$

$$2222^{5555}+4^{5555} \equiv (2\cdot 5)^{5555}+4^{5555} \equiv (3)^{5555}+4^{5555} \equiv 0 \pmod 7$$

$$5555^{2222}-4^{2222} \equiv (5\cdot 5)^{2222}-4^{2222} \equiv (4)^{2222}-4^{2222} \equiv 0 \pmod 7$$

$$4^{5555}-4^{2222} \equiv 0 \pmod 7 \quad \text{ya que } 4^5 \equiv 4^2 \pmod 7$$

por lo tanto $2222^{5555}+5555^{2222} \equiv 0 \pmod 7$ $\square$

[1] Cualquier comentario respecto a las soluciones a José Luis Alonzo Velázquez

4.- Los números primos p, q y r mayores a 3 están en progresión aritmética, es decir $p = p, q = p+d, r = p+2d$. Prueba que d es divisible entre 6.

Solución: Notemos que $p > 2$ de lo contrario r no es primo. Entonces p es de la forma $2k+1 \Rightarrow 2 \mid d$, de lo contario q es par. Entonces d tiene residuo 0,2 ó 4 módulo 6, y p por ser primo mayor que 2 tiene residuo 1 ó 5, de lo contario q ó r no serían primos.

Caso 1: p tiene residuo 1 módulo 6; sí d tiene residuo 2 módulo 6, entonces $p+d$ tiene residuo 3 y ya no es primo. Sí d tiene residuo 4 módulo 6, entonces $p+2d$ tiene residuo 3 y ya no es primo$\Rightarrow d \equiv 0 \pmod 6$.

Caso 2: p tiene residuo 5 módulo 6; sí d tiene residuo 2 módulo 6, entonces $p+2d$ tiene residuo 3 y ya no es primo. Sí d tiene residuo 4 módulo 6, entonces $p+d$ tiene residuo 3 y ya no es primo$\Rightarrow d \equiv 0 \pmod 6$.

Por lo tanto d es divisible por 6 $\square$

5.- Encuentra el último dígito de $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 99^2$.

Solución: $1^2+2^2+3^2+\ldots+99^2 = \frac{99\cdot 100\cdot 199}{6} = 10\cdot 33\cdot 5\cdot 199 \therefore$ es múltiplo de 10 $\Rightarrow$ el último dígito es 0 $\square$

6.- Prueba que dado k entero positivo, existen k enteros consecutivos compuestos.

Solución: $(k+1)!+2, (k+1)!+3, (k+1)!+4, \ldots, (k+1)!+(k+1)$ son k enteros consecutivos compuestos $\square$.

7.- Probar que $2^n > n$, para todo $n \in \mathbb{Z}(enteros)$.

Solución: Base de inducción $2^1 > 1$. Hipotesis de inducción supongamos que para cierta $k \geq 1$ tenemos que $2^k > k$. $2^k > k \Rightarrow 2\cdot 2^k > 2\cdot k \geq k+1 \Rightarrow 2^{k+1} > k+1$ $\square$

8.- Probar que $5^{2n}-1$ es un múltiplo de 24, para todo $n \in \mathbb{N}(Naturales)$.

Solución:

$$5^2 \equiv 1 \pmod{24}$$

$$\Rightarrow (5^2)^n \equiv 1^n \pmod{24} \Rightarrow 5^{2n} \equiv 1 \pmod{24}_{\square}$$

9.- Probar que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Solución: Base de inducción $1 \leq 1$. Hipotesis de inducción supongamos que para cierta $k \geq 1$ tenemos que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$. Ahora mostremos que ocurre para $k+1$ se cumple dado que se cumple para k; $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$, $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$ $\iff \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2} \iff \frac{k^2+k}{k(k+1)^2} \leq \frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}$ lo cual siempre ocurre $\therefore$ $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ $\forall n$ $\square$

10.- Probar que $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.[2]

Solución: Sea $S = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \Rightarrow Sr = ar + ar^2 + \ldots + ar^n$ $\Rightarrow S - Sr = a - ar^n \Rightarrow S(1-r) = a(1-r^n)$ despejando S, tenemos que $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $\square$

[2] Al escribir el denominador de esta forma estamos asumiendo que $r \neq 1$.