Soluciones[1] a Lista de Problemas de teoría de números

1.- ¿Para cuáles enteros positivos n se tiene que $(1+2+\ldots+n) \mid n!$?

Solución: Vemos que los que los únicos enteros que cumplen esto, son aquellos tales que $n+1$ no es primo.

Notemos que $(1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2}$, ahora $\frac{n(n+1)}{2} \mid n! \iff n+1 \mid 2\cdot(n-1)!$, lo cual ocurre dado que $n+1$ no es primo$\Rightarrow n+1 \mid 2\cdot(n-1)!\Box$

2.- ¿Cuánto es $a+b$?, si sabemos que $7a+3b=12$ y $3a+7b=8$.

Solución: Sumando las dos ecuaciones dadas obtenemos que $10a+10b=20$, y de aquí obtenemos que $a+b=2$.

3.- Si $\frac{x-3\sqrt{2004}}{3-y\sqrt{2004}}$, x, y y son números racionales, ¿cuánto vale xy?

Solución: Multiplicando $\frac{x-3\sqrt{2004}}{3-y\sqrt{2004}}$ por el conjugado del denominador obtenemos que

$$\frac{x-3\sqrt{2004}}{3-y\sqrt{2004}} = \frac{3x-6012y+\sqrt{2004}\cdot(xy-9)}{9-2004y^2},$$

para que esta expresión sea racional, $(xy-9)\sqrt{2004}$ debe ser racional, entonces $xy=9$.

4.- ¿Cuántas ternas x, y, z de números reales satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= 26 \\ y(x+y+z) &= 27 \\ z(x+y+z) &= 28? \end{aligned}$$

Solución: Sumando las tres ecuaciones tenemos que $(x+y+z)^2 = 81$, lo que implica que $x+y+z=\pm 9$, del cual se desprenden las soluciones $x=\frac{26}{9}, y=\frac{27}{9}, z=\frac{28}{9}$ y $x=-\frac{26}{9}, y=-\frac{27}{9}, z=-\frac{28}{9}$.

5.- Hallar la suma de todos los números que son permutaciones de los dígitos $1, 2, 3, 4,$ y 5. Esto es $12345+12354+\ldots+54321$.

Solución: Por el principio multiplicativo tenemos 5! números a sumar. Notemos que en las unidades, decenas, centenas, unidades de millar, y decenas de millar aparecen 4! 1's, 2's, 3's, 4's y 5's, y la suma en cada uno es $\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2}$. Sumando directamente tenemos que la suma es 3999960.

6.- Si $a+b=1$ y $a^2+b^2=2$, entonces a^3+b^3. ¿A cuánto es igual?

[1] Cualquier comentario respecto a las soluciones a José Luis Alonzo Velázquez

Solución: Factorizando tenemos que $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, pero $a+b=1$ por lo que $a^3+b^3=a^2-ab+b^2$. Por otro lado, como $a^2+b^2=2$, tenemos que $a^3+b^3=2-ab$. Finalmente, observemos que $2ab=(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)=(1)^2-(2)=-1$ de donde $ab=-\frac{1}{2}$ y $a^3+b^3=\frac{5}{2}$.

7.- ¿Para cuántos enteros positivos n se cumple que $n-17$ divide a $n+4$?

Solución: Queremos que $\frac{n+4}{n-17}$ sea un número entero, para esto, reescribimos la expresión como

$$\frac{n+4}{n-17}=\frac{n-17+17+4}{n-17}=1+\frac{21}{n-17}.$$

Para que esta fracción sea un número entero, basta que $n-17$ sea un divisor de 21. Los divisores de 21 son $\pm1,\pm3,\pm7,\pm21$. Igualando $n-17$ a cada uno de los divisores, obtenemos los valores de n que hacen que $\frac{21}{n-17}$ sea entero. Es fácil ver que todos los divisores, excepto -21, cumplen que n es un entero positivo.

8.- ¿De cuántas formas se puede escribir $\frac{1}{14}$ en la forma $\frac{a}{7}+\frac{b}{2}$ con a y b enteros?

Solución:La igualdad $\frac{1}{14}=\frac{a}{7}+\frac{b}{2}$ es equivalente a la igualdad $2a+7b=1$. Es fácil ver que $a=-3+7k$ y $b=1-2k$ son solución para cualquier entero k.

9.- ¿Cuántos pares (m,n) de enteros satisfacen la ecuación $m+n=mn$?

Solución: Si $mn=m+n$, entonces $(m-1)(n-1)=1$. Tenemos que $m-1=n-1=1$ ó $m-1=n-1=-1$. Por lo tanto $(m,n)=(2,2)$ ó $(m,n)=(0,0)$.

10.- Si $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}$ y $y=\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\dots}}}$, entonces ¿Cuál es el valor de $x-y$?

Solución:Tenemos que $x^2=6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}$, es decir, $x^2=6+x$. Resolviendo esta ecuación cuadrática tenemos dos posibles soluciones: $x=3$ y $x=-2$. Pero x debe ser positivo, entonces $x=3$. Análogamente, tenemos que $y^2=6-y$, de donde obtenemos que $y=2$. Por lo tanto, $x-y=1$.

Segunda solución: Como $x^2 = 6 + x$ y $y^2 = 6 - y$ tenemos que $x^2 - y^2 = x + y$, esto es,

$$(x - y)(x + y) = x + y.$$

Dado que x y y son positivos, tenemos que $x + y$ también lo es, entonces, dividiendo entre $x + y$ ambos lados de la ecuación obtenemos que $x - y = 1$.