Soluciones[1] a Lista de Problemas de teoría de números

1.- Demostrar que que todo entero positivo n tiene una expresión única de la forma $n = 2^r m$, $r \geq 0$, m un entero positivo impar.

Solución: Sean r_1, r_2, m_1, m_2 tales que $n = 2^{r_1} m_1$, $n = 2^{r_2} m_2$ con $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$ y m_1, m_2 enteros impares positivos. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $r_2 \geq r_1 \Rightarrow m_1 = 2^{r_2 - r_1} m_2$ dado que m_1 es impar entonces $2^{r_2 - r_1} = 1 \Rightarrow r_2 = r_1 \Rightarrow m_1 = m_2 \therefore$ solo existe una expresión única de esta forma $\square$

2.- Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ fraciones en su más simple expresión, de manera que $(a, b) = (c, d) = 1$. Probar que si su suma es un entero, entonces $\mid b \mid = \mid d \mid$.

Solución: Supongamos que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k, k \in \mathbb{Z}$, entonces $\frac{ad+bc}{bd} = k \Rightarrow \frac{ad+bc}{b} = kd$, como $b \mid bc$ entonces $b \mid ad$, pero $(a, b) = 1 \Rightarrow b \mid d$, analogamente $\frac{ad+bc}{d} = kb \Rightarrow d \mid b \therefore \mid b \mid = \mid d \mid$ $\square$

3.- Probar que cualquier primo de la forma $3k + 1$ es de la forma $6k + 1$.

Solución: Sea p un primos de la forma $3k + 1$, supongamos que p es de la forma $6k$, o bien $6k + 2$, o bien $6k + 4$ entonces p es par$\Rightarrow p = 2$, contradiciendo la afirmación inicial de que es de la forma $3k + 1$.

Ahora supongamos que p es de la forma $6k + 3 \Rightarrow p = 3(2k + 1)$ lo cual no puede ser de la forma $3k + 1$, contradiciendo la afirmación inicial de que es primo.

Ahora supongamos que p es de la forma $6k + 5 \Rightarrow p = 3(2k + 1) + 2$ lo cual no puede ser de la forma $3k + 1$, contradiciendo la afirmación inicial.

Por lo tanto p es de la forma $6k + 1$ $\square$

4.- Si x y y son impares, probar que $x^2 + y^2$ no puede ser un cuadrado perfecto.

Solución: x y y impares $\Rightarrow x = 2r + 1$ para algún $r \in \mathbb{Z}$ y $y = 2s + 1$ para algún $s \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow x^2 + y^2 = (2r + 1)^2 + (2s + 1)^2 = 4(r^2 + s^2 + r + s) + 2$ $\therefore 2 \mid x^2 + y^2$, pero $4 \nmid x^2 + y^2$ Por lo tanto no puede ser un cuadradp perfecto, ya que si un primo lo divide lo debe dividir su cuadrado $\square$

[1] Cualquier comentario respecto a las soluciones a José Luis Alonzo Velázquez

5.- Probar que $(a,b) = (a,b,a+b)$ y más generalmente, que $(a,b) = (a, ax+by)$ para todos los enteros x, y.

Solución: La primera afirmación es consecuencia directa de la segunda afirmación. Así que a continuación demostraremos la segunda afirmación:

$$\begin{aligned}
(a, ax+by) &= \text{menor valor positivo de } ax_1 + (ax+by)y_1 \\
&= \{\text{menor valor positivo de } a(xy_1 + x_1) + b(yy_1)\} \\
&= \{\text{menor valor positivo de } ax' + by'\}, \text{ donde } x' = xy_1 + x_1 \text{ y } y' = yy_1 \\
&= (a,b)\square
\end{aligned}$$

6.- Probar que $(a, a+k) \mid k$ para todos los enteros a, k no ambos cero.

Solución: Por problema (5) tenemos que $(a, a+k) = (a,k)$, pero por definición $(a,k) \mid k \Rightarrow (a, a+k) \mid k$ $\square$

7.- Probar que $(a, a+2) = 1$, o bien, 2 para todo entero a.

Solución: Por problema (5) tenemos que $(a, a+2) = (a, 2)$, entonces $(a, a+2) = 1$, o bien, 2, ya que son los únicos divisores de 2 $\square$

8.- Probar que el cuadrado de cualquier entero de la forma $5k+1$ es de la misma forma.

Solución: Sea $n = 5k+1 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 50k + 1 = 5(5k^2 + 10k) + 1$ $\square$

9.- Probar que no existen enteros x, y que satisfagan $x + y = 100$ y $(x,y) = 3$.

Solución: Para que existan soluciones, (x,y) debe dividir a 100, pero $3 \nmid 100$, por lo tanto no tiene soluciones $\square$

10.- Probar que existen un número infinito de pares de enteros x y y que satisfacen $x + y = 100$ y $(x,y) = 5$.

Solución: Sea $x_0 = 55$ y $y_0 = 45$ que sea otra solución es de la forma $x = 55 + r$ y $y = 45 - r$, y $(55+r, 45-r)$ donde $r = 100k$ con $(k, 55) = 1$, sea $d = (55+r, 45-r) \Rightarrow d \mid 100 \Rightarrow d \mid 55$ y $d \mid 45$, pero por construcción d es múltiplo de 5 entonces $(55+r, 45-r) = 5$, y estos números son solución$\square$