

### Lista de Problemas de teoría de números

1.- Demostrar que que todo entero positivo  $n$  tiene una expresión única de la forma  $n = 2^r m$ ,  $r \geq 0$ ,  $m$  un entero positivo impar.

2.- Sean  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  fracciones en su más simple expresión, de manera que  $(a, b) = (c, d) = 1$ . Probar que si su suma es un entero, entonces  $|b| = |d|$ .

3.- Probar que cualquier primo de la forma  $3k + 1$  es de la forma  $6k + 1$ .

4.- Si  $x$  y  $y$  son impares, probar que  $x^2 + y^2$  no puede ser un cuadrado perfecto.

5.- Probar que  $(a, b) = (a, b, a + b)$  y más generalmente, que  $(a, b) = (a, ax + by)$  para todos los enteros  $x, y$ .

6.- Probar que  $(a, a + k) | k$  para todos los enteros  $a, k$  no ambos cero.

7.- Probar que  $(a, a + 2) = 1$ , o bien, 2 para todo entero  $a$ .

8.- Probar que el cuadrado de cualquier entero de la forma  $5k + 1$  es de la misma forma.

9.- Probar que no existen enteros  $x, y$  que satisfagan  $x + y = 100$  y  $(x, y) = 3$ .

10.- Probar que existen un número infinito de pares de enteros  $x$  y  $y$  que satisfacen  $x + y = 100$  y  $(x, y) = 5$ .