Variedades.

Notación:
Las coordenadas y componentes en $\mathbb{R}^n$ se escriben:

$$x = (x^1, \dots, x^n)$$
$$\text{ó} \quad x^i.$$

Sea M un espacio topológico (ó un espacio métrico). Una carta o un sistema coordenado es un par (ξ, U) donde:

$$\xi : U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$$

es un homeomorfismo con $U \subseteq M$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos. En este caso escribimos $\xi = (x^1, \dots, x^n)$, i.e. $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son las componentes.

$\therefore \forall p \in U$: $\xi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas de p respecto de ξ.

Sean
$$\xi : U \longrightarrow \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$\eta : V \longrightarrow \eta(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$
dos cartas. ξ y η son C^∞-compatibles (o se traslapan suavemente) si la función:

$$\xi \circ \eta^{-1} : \eta(U \cap V) \longrightarrow \xi(U \cap V)$$

es suave con inversa suave.

Si $U \cap V = \emptyset$, aplicamos la definición. Si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces es abierto en M y $\eta(U \cap V)$, $\xi(U \cap V)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$.

Definición:
En un espacio topológico M un atlas es una familia

$$\mathcal{A} = \{(\xi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$$

de cartas todas C^∞-compatibles entre si tales que $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.
Además todas las cartas se mapean a abiertos en un mismo $\mathbb{R}^n$.
Un atlas $\mathcal{A}$ se dice completo o maximal si se cumple:

*) Si (ξ, U) es una carta de M compatible con cada elemento de $\mathcal{A}$, entonces $(\xi, U) \in \mathcal{A}$.

Ejemplo:
$\mathbb{R}^n$ posee el atlas $\mathcal{A} = \{(id_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$
pero si $\varphi : U \longrightarrow V$ es cualquier

difeomorfismo con $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos tal que $\varphi(p) \neq p$ para algún $p \in U$, entonces

(φ, U) es carta compatible con $(id_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)$

$$(\varphi, U) \notin \mathcal{A}.$$

$$\varphi \circ id_{\mathbb{R}}^{-1} = \varphi \,,\quad id_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1}$$

Lema: Si $\mathcal{A}$ es un atlas de M, entonces la familia:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \left\{ (\xi, U) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\xi, U) \text{ carta de } M \\ \text{compatible con todo } (\eta, V) \in \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

es el único atlas maximal que contiene a $\mathcal{A}$.

Un punto importante de la demostración es que la relación $\sim$ definida por:

$$(\xi, U) \sim (\eta, V) \iff (\xi, U), (\eta, V) \text{ son } C^\infty\text{- compatibles}$$

es relación de equivalencia.
La transitividad usa que:

$$(\xi_1, U_1) \sim (\xi_2, U_2) \sim (\xi_3, U_3)$$

$$\Rightarrow \xi_1 \circ \xi_3^{-1} = \xi_1 \circ \xi_2^{-1} \circ \xi_2 \circ \xi_3^{-1} \text{ es suave con inversa suave.}$$

Definición: Una variedad diferenciable es un espacio topológico M Hausdorff 2do numerable junto con un atlas completo $\mathcal{A}$.
Si las cartas mapean a abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces $n = \dim M$.
Si $(\xi, U) \in \mathcal{A}$, decimos que (ξ, U) es carta de M, y si $p \in U$ decimos que U es vecindad coordenada de p.

Ejemplos:

1) Si M es T_2 2do numerable y $\mathcal{A}$ es atlas, entonces M es variedad suave con el atlas maximal que contiene a $\mathcal{A}$.

2) $\mathbb{R}^n$ con el atlas $\mathcal{A} = \{(id_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$

3) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ es variedad con las siguientes cartas.

Sean $U_j^+ = \{x \in S^n \mid x_j > 0\}$

$U_j^- = \{x \in S^n \mid x_j < 0\}$

y sean:

$$\xi_j^\pm : U_j^\pm \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})$$

los cuales son homeomorfismos a $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$, con inversas:

$$(\xi_j^{\pm})^{-1}(u_1, \ldots, u_n) =$$
$$= (u_1, \ldots, \underbrace{\pm\sqrt{1-u_1^2-\ldots-u_n^2}}_{j}, \ldots, u_n)$$

Los cambios de coordenadas son

$$(\xi_k^{\pm}) \circ (\xi_j^{\pm})^{-1}$$

que tienen componentes tomadas entre:

$$u \longmapsto u_i, \quad u \longmapsto \pm\sqrt{1-u_1^2-\ldots-u_n^2}$$

que son suaves.

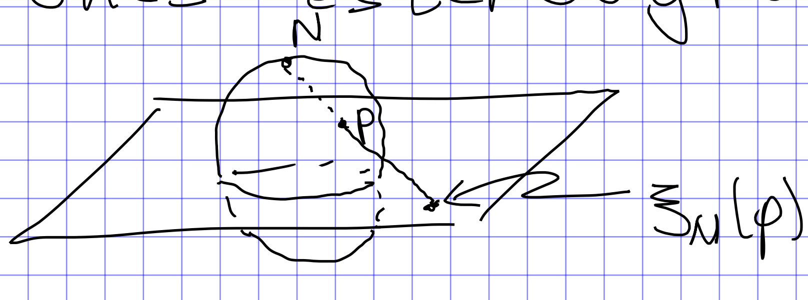
$$\therefore \quad \mathcal{A} = \{(\xi_j^+, U_j^+)\}_{j=1}^{n+1} \cup \{(\xi_j^-, U_j^-)\}_{j=1}^{n+1}$$

es atlas de S^n.

Alternativamente:

$$\mathcal{A}' = \{(\xi_N, S^n \setminus \{N\}), (\xi_S, S^n \setminus \{S\})\}$$

es atlas donde $N = e_{n+1}$, $S = -e_{n+1}$ y ξ_N, ξ_S son las correspondientes proyecciones estereográficas.



Se puede ver que:

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$$

en el sentido de que sus cartas son mutuamente compatibles.

$\therefore$ $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ están contenidos en un mismo atlas completo.

Pero S^7 posee dos atlas completos distintos.

3) $\mathbb{R}$ posee dos atlas distintos:

$$\mathcal{A}_0 = \{(id_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})\}$$

$$\mathcal{A}_1 = \{(f, \mathbb{R})\}$$

donde $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^3$.

$\therefore$ $f^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$.

Pero $(f, \mathbb{R}) \not\sim (id_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$:

$$id_{\mathbb{R}} \circ f^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$$

que no es suave.

$\therefore$ $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_0)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ son variedades distintas pero veremos que son difeomorfas.