Un par de construcciones:

*) Si M con atlas $\mathcal{A}$ es variedad entonces $U \subseteq M$ abierto es variedad con el atlas:

$$\mathcal{A}_U = \left\{ (\xi|_{U\cap V}, U \cap V) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\xi, V) \in \mathcal{A} \\ U \cap V \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

*) Si M y N son variedades, entonces $M \times N$ es variedad con las cartas:

$$\xi \times \eta : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

$$(\xi \times \eta)(p, q) = (\xi(p), \eta(q))$$

donde $\xi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $\eta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son cartas de M y N, respectivamente.

$\therefore \dim M \times N = \dim M + \dim N$.

$\longrightarrow$) Lo anterior se puede repetir usando C^k en vez de C^∞ con $k = 0, \ldots, \infty, \omega$.

Donde una función f se dice C^ω si es analítica <u>real</u>.

Mapeos suaves.

Sea M una variedad y $f: M \to \mathbb{R}$ función. f se dice suave si para toda carta (ξ, U) de M:

$$\begin{tikzcd} M \supseteq U \arrow[r, "f|_U"] \arrow[d, "\xi"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \supseteq \xi(U) \arrow[ur, "f \circ \xi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

$f \circ \xi^{-1}$ es suave. Si (η, V) es otra carta con $U \cap V \neq \emptyset$, entonces:

$$f \circ \xi^{-1} = (f \circ \eta^{-1}) \circ \underbrace{(\eta \circ \xi^{-1})}_{C^\infty \text{ con inversa } C^\infty}$$

en $\xi(U \cap V)$.

Por tanto, $f \circ \xi^{-1}$ es suave en $\xi(U \cap V) \iff f \circ \eta^{-1}$ es suave en $\eta(U \cap V)$. Como consecuencia:

*) Si $\{(\xi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ son cartas de M con $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, entonces $f: M \to \mathbb{R}$ es suave ssi $f \circ \xi_\alpha^{-1}$ es suave $\forall \alpha \in I$.

El conjunto de funciones suaves $M \to \mathbb{R}$ se denota por:

$$C^\infty(M) \quad \text{ó} \quad \mathfrak{F}(M).$$

el cual es una $\mathbb{R}$-álgebra.

Sean M, N variedades y $\varphi: M \to N$ mapeo. φ se dice suave si para cualesquiera cartas (ξ, U) y (η, V) de M y N, respectivamente, el mapeo:

$$\begin{tikzcd} M \supseteq U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\xi"'] & V \subseteq N \arrow[d, "\eta"] \\ \mathbb{R}^m \supseteq \xi(U) \arrow[r, "\eta \circ \varphi \circ \xi^{-1}"] & \eta(V) \subseteq \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\eta \circ \varphi \circ \xi^{-1}$ es suave. Esto requiere que $\varphi(U) \subseteq V$ para lo cual agregamos lo siguiente a la definición:

*) φ se pide continua y dada (η, V) escogemos (ξ, U) de modo que $\varphi(U) \subseteq V$. Si (ξ, U) es cualquier carta restringimos a $\xi|_{U \cap \varphi^{-1}(V)}$.

En otras palabras consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \supseteq U \cap \varphi^{-1}(V) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\xi"'] & V \subseteq N \arrow[d, "\eta"] \\ \mathbb{R}^m \supseteq \xi(U \cap \varphi^{-1}(V)) \arrow[r, "\eta \circ \varphi \circ \xi^{-1}"] & \eta(V) \subseteq \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

y se pide C^∞ de $\eta \circ \varphi \circ \xi^{-1}$ $\forall (\xi, U), (\eta, V)$.

Observaciones:

1) Para la definición de suavidad de $\varphi: M \longrightarrow N$ basta usar suficientes cartas (ξ, U) que cubran a M:

*) φ continua

*) $\forall p \in M \; \exists \, (\xi, U)$ carta de M con $p \in U$ y carta (η, V) de N tal que $p \in \varphi^{-1}(V)$ de modo que $\eta \circ \varphi \circ \xi^{-1}$ es suave en $\xi(U \cap \varphi^{-1}(V))$

2) Si $\varphi: M \longrightarrow N$ y tenemos cartas:

$(\xi_1, U_1), (\xi_2, U_2)$ de M

$(\eta_1, V_1), (\eta_2, V_2)$ de N

entonces:

$$\underbrace{\eta_1 \circ \varphi \circ \xi_1^{-1}}_{C^\infty} = (\eta_1 \circ \eta_2^{-1}) \circ \underbrace{(\eta_2 \circ \varphi \circ \xi_2^{-1})}_{C^\infty} \circ (\xi_2 \circ \xi_1^{-1})$$

$\therefore$ $C^\infty \iff C^\infty$

en $\xi_1(U_1 \cap U_2 \cap \varphi^{-1}(V_1 \cap V_2))$.

3) Si (ξ, U) es carta de M, $p \in U$ y V es vecindad de p entonces $(\xi|_{U \cap V}, U \cap V)$ es también carta y $U \cap V \subseteq V$. Por tanto, los dominios de cartas forman una base para

los abiertos de M.

4) Sean M variedad $p_0 \in U$ y (ξ, U) carta de M.
$\therefore$ $\xi(p_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ Entonces

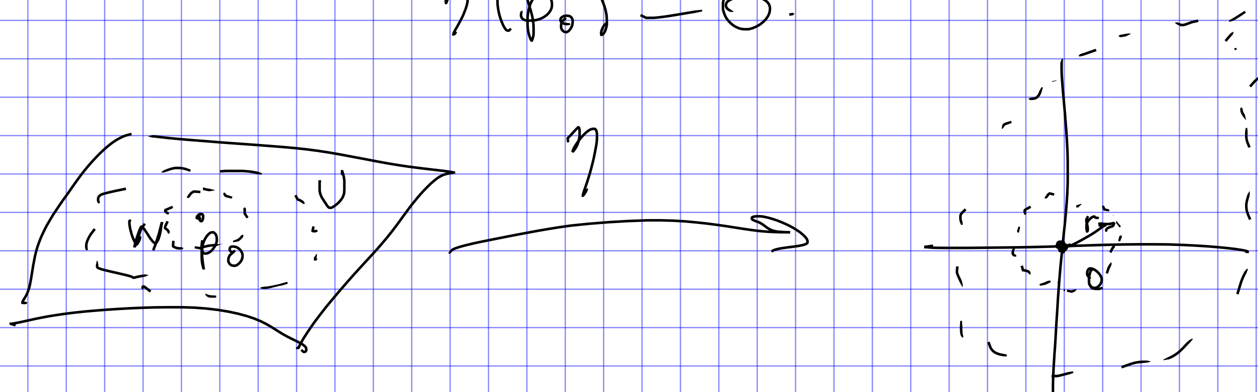
$$\xi_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\xi_1(p) = \xi(p) - x_0$$

define una nueva carta (ξ_1, U) $\ni$ $\xi_1(p_0) = 0$. Además $\xi_1(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y por tanto $\exists$ $r > 0 \ni$ $B(0, r) \subseteq V$. Luego

$$(\eta, W) = \left(\xi_1|_{\xi_1^{-1}(B(0,r))}, \xi_1^{-1}(B(0,r))\right)$$

es una nueva carta con:

$$p_0 \in W \subseteq U, \quad \eta(W) = B(0,r).$$
$$\eta(p_0) = 0.$$



Además, recordamos que existen mapeos suaves con inversa suave $B(0, r) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\left(n = 1 : t \longmapsto \frac{t}{1 - t^2}\right)$$

Definición: Un mapeo $\varphi: M \to N$ se dice difeomorfismo si es biyectivo suave con inversa suave.

Ejemplo:
Toda carta (ξ, U) de una variedad M es difeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} M \supseteq U \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\xi"] & V \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[d, "id"] \\ \mathbb{R}^n \supseteq V \arrow[r, "id \circ \xi \circ \xi^{-1}"] & V \subseteq \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\hookrightarrow id_V \longleftarrow C^\infty$ con inv. C^∞.

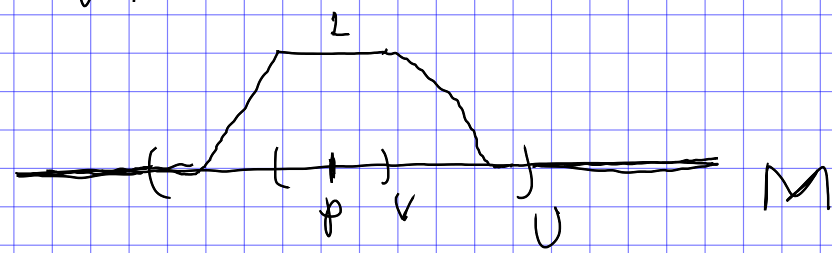
Recordamos que para $f: M \to \mathbb{R}$ (M espacio topológico)

soporte de f:
$$\operatorname{supp} f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

$\therefore$ $M \setminus \operatorname{supp} f$ es el abierto más grande donde $f \equiv 0$.

Lema: M variedad, $p \in U$, $U \subseteq M$ abierto. Entonces existe una función $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ suave $\ni$ (bump function, función tope):

(1) $f(M) \subseteq [0,1]$
(2) $f \equiv 1$ en una vecindad de p.
(3) $\operatorname{supp} f \subseteq U$.



$\longrightarrow$) Probar que:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

es C^∞.