Lema:
Sean M variedad, $U \subseteq M$ abierto, $p \in U$.
Entonces $\exists\, f \in C^\infty(M)$ tal que:

(1) $f(M) \subseteq [0,1]$
(2) $f \equiv 1$ en una vecindad de p.
(3) $\operatorname{supp} f \subseteq U$.

Dem.:
Primero se hace en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$.
Comenzamos con:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

φ es continua: $\lim_{t \to 0^+} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0$

Más aún $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, para lo cual sólo hay que checar:

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi^{(k)}(t) = 0.$$

lo cual se cumple porque $e^{-\frac{1}{t^2}}$ se va a cero más rápida que cualquier polinomio. Por ejemplo:

$$\varphi'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}} = \frac{2x^3}{e^{x^2}} \xrightarrow[t \to 0^+]{x \to +\infty} 0$$

$t > 0 \qquad x = \frac{1}{t}$

en general $\varphi^{(k)}(t)$ es suma de

términos de la forma $\frac{c}{t^n} e^{-\frac{1}{t^2}}$.

$\therefore \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi|_{(-\infty,0]} \equiv 0$, $\varphi|_{(0,+\infty)} > 0$.

Ahora tomamos $0 < a < b$ y queremos construir:

Sean:

$\varphi_1(t) = \varphi(t-a)$ $\quad \varphi_1 \equiv 0$ en $t \leq a$, $\varphi_1 > 0$ en $t > a$

$\varphi_2(t) = \varphi(b-t)$ $\quad \varphi_2 \equiv 0$ en $t \geq b$, $\varphi_2 > 0$ en $t < b$

Se define:

$$h_{a,b}(t) = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t) + \varphi_2(t)} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\therefore h_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $h_{a,b}(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$.

Además:

$t \leq a \Rightarrow h_{a,b}(t) \equiv 1 \quad (\varphi_1(t) \equiv 0)$

$t \geq b \Rightarrow h_{a,b}(t) \equiv 0 \quad (\varphi_2(t) \equiv 0)$

Reflejando:

$p = 0$
$M = \mathbb{R}$

Sean $0 < r_1 < r_2$ dados y defina:

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = h_{r_1^2, r_2^2}(\|x\|^2)$$

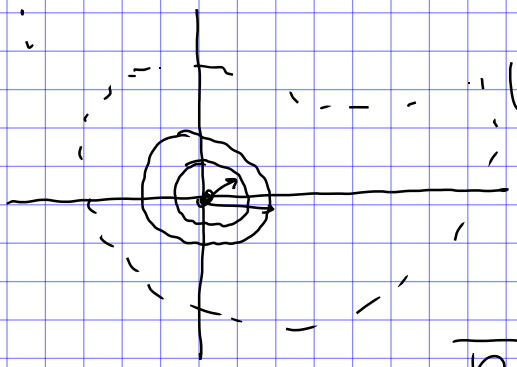
$\therefore$ $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y satisface:

$$g(\mathbb{R}^n) \subseteq [0,1], \quad g|_{\overline{B(0,r_1)}} \equiv 1, \quad g|_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,r_2)}} \equiv 0$$

de hecho:

$$\operatorname{supp} g = \overline{B(0,r_2)}$$

Y esto resuelve el Lema con $M = \mathbb{R}^n$:



$M = \mathbb{R}^n$

$p = 0 \in U$

$\overline{B(0,r_2)} \subseteq U$

Para el caso general de M, tomamos una carta (ξ, V) con $p \in V \subseteq U$ y tal que:

$$\xi(V) = B(0,R), \quad \xi(p) = 0$$

Tomamos $0 < r_1 < r_2 < R$. Definimos:

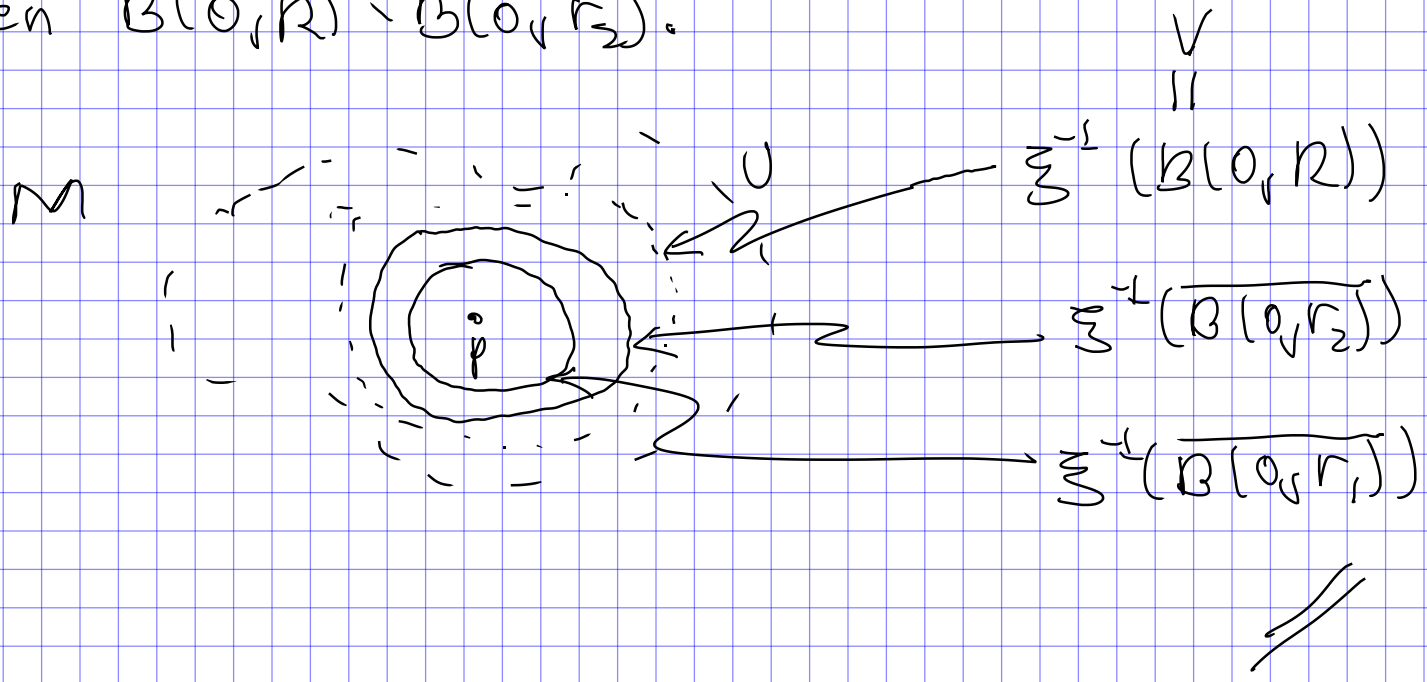
$$f : M \longrightarrow [0,1]$$

$$f(x) = \begin{cases} g(\xi(x)) & x \in V = \xi^{-1}(B(0,R)) \\ 0 & x \in M \setminus \xi^{-1}(\overline{B(0,r_2)}) \end{cases}$$

Como $\overline{B(0,r_2)} \subseteq B(0,R)$, entonces:

$$V \cup (M \setminus \xi^{-1}(\overline{B(0,r_2)})) = M$$

pero no es unión disjunta. Por tanto hay que checar que:

$$g(\xi(x)) = 0 \quad \forall x \in V \setminus \xi^{-1}(\overline{B(0,r_2)}) = \xi^{-1}(B(0,R) \setminus \overline{B(0,r_2)})$$

lo cual se cumple pues $g \equiv 0$ en $B(0,R) \setminus \overline{B(0,r_2)}$.