Vectores tangentes.

Sea M variedad.

vector tangente = ?
espacio tangente = ?

Definición:
M variedad, $p \in M$. Un vector tangente a M en p es una función:

$$v : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que:

(1) v es $\mathbb{R}$-lineal

(2) v satisface la regla de Leibniz:

$$v(fg) = v(f)\, g(p) + f(p)\, v(g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

El espacio tangente a M en p se define:

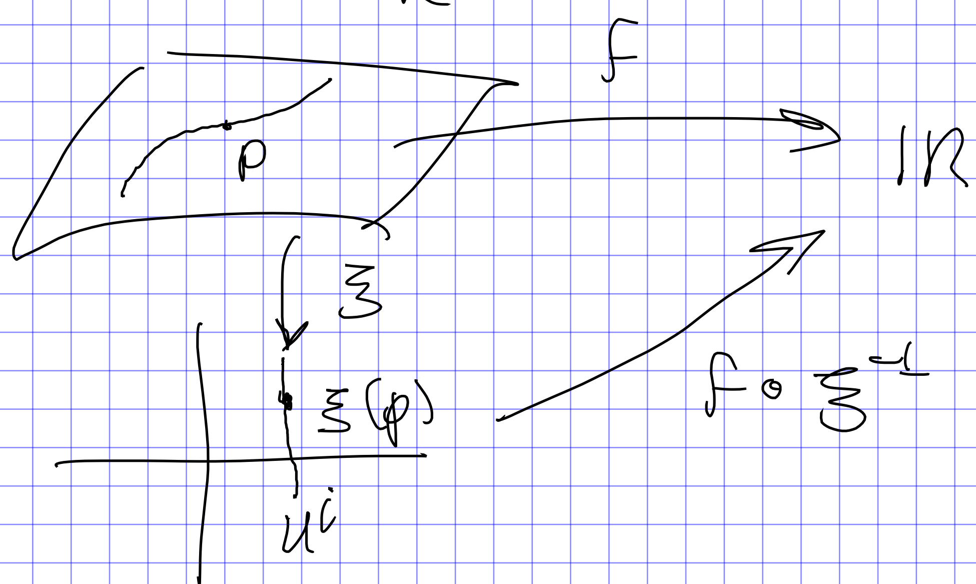
$$T_pM = \{ v \mid v \text{ vector tangente a } M \text{ en } p \}.$$

Claramente T_pM es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Definición:
Sea $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ carta de M alrededor de p. Si $f \in C^\infty(M)$ entonces se definen las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p))$$

donde $u^1, \dots, u^n$ son las coordenadas de $\mathbb{R}^n$.



Afirmación:

$$\partial_i\big|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

pertenece a T_pM.

Lema: Sea $v \in T_pM$.

(1) Si $f, g \in C^\infty(M)$, $f = g$ en una vecindad de p, entonces $v(f) = v(g)$.

(2) Si $h \in C^\infty(M)$, $h \equiv cte$ en una vecindad de p, entonces $v(h) = 0$.

Dem.:

(1): $v(f) = v(g) \Leftrightarrow v(f-g) = 0$

Luego basta probar:

$$f \equiv 0 \text{ en una vecindad de } p \Rightarrow v(f) = 0.$$

Primero como v es $\mathbb{R}$-lineal $v(0) = 0$.

Sea U abierto con $p \in U$ y $f|_U \equiv 0$. Sea $\varphi \in C^\infty(M)$ función tope (bump function) con $\operatorname{supp} \varphi \subseteq U$, $\varphi(p) = 1$.

$\therefore f\varphi \in C^\infty(M)$, $f\varphi \equiv 0$ en M.

Luego:

$$0 = v(f\varphi) = v(f)\overset{1}{\cancel{\varphi(p)}} + \overset{0}{\cancel{f(p)}}v(\varphi)$$
$$= v(f).$$

(2): Si $h \equiv c \in \mathbb{R}$ en M:

$$\nu(c) = c\,\nu(1)$$
$$\nu(1) = \nu(1\cdot 1) = \nu(1)1 + 1\nu(1)$$
$$= 2\nu(1)$$
$$\Rightarrow \nu(1) = 0 \Rightarrow \nu(c) = 0.$$

Si $h \equiv c$ en una vecindad de p, (1) implica:

$$\nu(h) = \nu(c) = 0.$$

Observación:

Sea $U \subseteq M$ abierto, $p \in U$.
Sea $f \in C^\infty(U)$.
Escogemos algún abierto $V \ni$:

$$p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

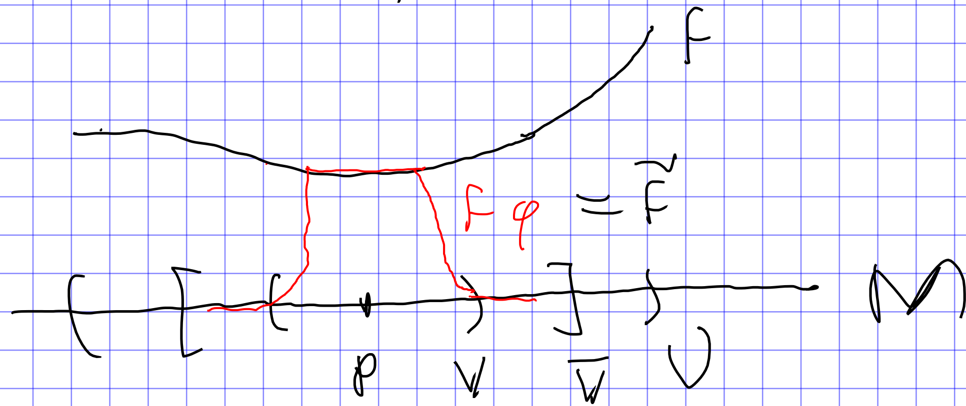
Sea $\varphi \in C^\infty(M)$ bump function tal que $\varphi \equiv 1$ en una vecindad de p y $\operatorname{supp}\varphi \subseteq V$.

Definimos:

$$\tilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\tilde{f} = f\varphi$$

es decir:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} f(x)\varphi(x) & x \in U \\ 0 & x \in M \setminus \overline{V} \end{cases}$$



Entonces $\tilde{F}$ es suave sobre todo M y $\tilde{F} \equiv f$ en una vecindad de p.

Con estas elecciones si $v \in T_pM$ definimos:

$$v(f) = v(\tilde{F}) \quad \forall f \in C^\infty(U).$$

Esto además define un isomorfismo: $p \in U \leftarrow$ abierto.

$$T_pU \xrightarrow{\cong} T_pM.$$

Teorema:
Si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ es carta de M alrededor de p, entonces:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

es base de T_pM. Más aún: $\forall v \in T_pM$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} v(x^j) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = v(x^j) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$$

convención de suma de Einstein.

Dem.:
Desplazando ξ por una constante $c \in \mathbb{R}^n$ podemos suponer $\xi(p) = 0$, pues:

$$v(x^j + c^j) = v(x^j).$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k}(q) = \frac{\partial (x^j \circ \xi^{-1})}{\partial u^k}(\xi(q))$$
$$= \frac{\partial (u^j \circ \xi \circ \xi^{-1})}{\partial u^k}(\xi(q))$$

$$= \frac{\partial u^j}{\partial u^k}(\xi(q)) = \delta_{jk}.$$

Suponemos que $\operatorname{dom} \xi = U$ y $\xi(U) = B(0, \varepsilon)$.

Si $g \in C^\infty(B(0,\varepsilon))$ definimos:

$$g_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tq)\,dt$$

$q \in B(0,\varepsilon)$. Entonces:

$$g = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i u^i$$

en $B(0,\varepsilon)$, con:

$$g_i(0) = \frac{\partial g}{\partial u^i}(0)$$

Esto es fórmula de Taylor.

Sea $f \in C^\infty(M)$.

Lo aplicamos a $g = f \circ \xi^{-1}$ y al resultado lo componemos con ξ para obtener.

$$f \circ \xi^{-1} = f \circ \xi^{-1}(0) + \sum_{i=1}^n g_i u^i$$

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n (g_i \circ \xi)(u^i \circ \xi)$$

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} f_i x^i$$

Además:

$$f_i(p) = g_i \circ \xi(p) = g_i(0)$$
$$= \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

$$\therefore \ v(F) = v(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} v(f_i x^i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(v(f_i) \cancel{x^i(p)}^{0} + f_i(p) v(x^i) \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

$$\therefore \ v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

$\therefore$ $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ genera a T_pM.

Si $\sum_{i=1}^{n} c_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = 0$, entonces:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}\bigg|_p = c_j.$$

$\therefore \; \partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ es base. //