Diferenciales de mapeos.

Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un mapeo suave.

¿Cómo definir:

$$d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N \, ?$$

Debe ser:

$$\begin{aligned} d\varphi_p : T_pM &\longrightarrow T_{\varphi(p)}N \\ v &\longmapsto d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)}N. \end{aligned}$$

$$d\varphi_p(v) : C^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$(d\varphi_p(v))(f) = v(f \circ \varphi)$$

Definición:

$\varphi : M \longrightarrow N$ suave, su diferencial en $p \in M$ se define por:

$$\begin{aligned} d\varphi_p : T_pM &\longrightarrow T_{\varphi(p)}N \\ v &\longmapsto d\varphi_p(v) \end{aligned}$$

donde $d\varphi_p(v) : C^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto v(f \circ \varphi)$$

Veamos que $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)}N$:

$$(d\varphi_p(v))(af+bg) =$$

$$= v((af+bg)\circ\varphi) = v(af\circ\varphi + bg\circ\varphi)$$

$$= a\,v(f\circ\varphi) + b\,v(g\circ\varphi)$$

$$= a(d\varphi_p(v))(f) + b(d\varphi_p(v))(g)$$

$$(d\varphi_p(v))(fg) =$$

$$= v((fg)\circ\varphi) = v((f\circ\varphi)(g\circ\varphi))$$

$$= v(f\circ\varphi)(g\circ\varphi)(p) + (f\circ\varphi)(p)\,v(g\circ\varphi)$$

$$= d\varphi_p(v)(f)\; g(\varphi(p))$$

$$+ \; f(\varphi(p))\; d\varphi_p(v)(g)$$

También es claro que $d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ es $\mathbb{R}$-lineal:

$$(d\varphi_p(v))(f) = v(f\circ\varphi).$$

Lema:
Sean dados los siguientes datos:

$$\begin{array}{l} M \,,\; p \in U \,,\; \xi = (x^1, \dots, x^m) \\ \varphi \downarrow \\ N \,,\; \varphi(p) \in V \,,\; \eta = (y^1, \dots, y^n) \end{array}$$

Entonces:

$$d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}(p) \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{\varphi(p)}$$

$\forall j = 1, \dots, m.$

Dem.:

$$d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right)(y^i) \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{\varphi(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p (y^i \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_{\varphi(p)}.$$

//

Lema: (regla de la cadena)

$M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P$ suaves

$\Rightarrow$ $\psi \circ \varphi$ es suave

$$d(\psi \circ \varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p.$$

$\forall p \in M$.

¡en coordenadas!

$$\frac{\partial (z^k \circ \psi \circ \varphi)}{\partial x^j}(p) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (z^k \circ \psi)}{\partial y^i}(\varphi(p)) \frac{\partial (y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}(p).$$

Teorema (de la función inversa)

$\varphi : M \to N$ suave y $d\varphi_{p_0}$ biyectiva $\Rightarrow$ $\exists$ U vecindad de p_0 en M, V vecindad de $\varphi(p_0)$ en N $\ni$:

$$\varphi|_U : U \to V$$

es difeomorfismo.

Def.: Un difeomorfismo es un mapeo suave biyectivo con inversa suave.

Dem.:

$$\begin{tikzcd} U_1 \subseteq M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\xi"'] & N \supseteq V_1 \arrow[d, "\eta"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "F = \eta \circ \varphi \circ \xi^{-1}"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$dF_{\xi(p_0)} = d\eta_{\varphi(p_0)} \circ d\varphi_{p_0} \circ d(\xi^{-1})_{\xi(p_0)}$$

y se aplica TFI en $\mathbb{R}^n$. //

Definición:

Un mapeo suave $\varphi: M \to N$ se dice difeomorfismo local

1) en p_0, si $\exists$ U vec. de p_0 V vec. de $\varphi(p_0)$ $\ni$ $\varphi|_U : U \to V$ es difeomorfismo.

2) en M, si es difeomorfismo local en todo $p \in M$.

TFI: $\varphi: M \to N$ es difeomorfismo local $\iff$ $d\varphi_p$ es isomorfismo $\forall p \in M$.

Curvas:

Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ curva suave.
Es decir, M variedad e $I \subseteq \mathbb{R}$ es intervalo abierto.

$$\therefore \quad d\alpha_t : T_t I \longrightarrow T_{\alpha(t)} M$$

Tenemos el isomorfismo:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\cong} T_t I \quad \forall t \in I$$

$$c \longmapsto c \left.\frac{d}{du}\right|_t$$

u la coordenada de $I \subseteq \mathbb{R}$.

$$1 \longleftrightarrow \left.\frac{d}{du}\right|_t$$

El vector tangente a α en t se define por:

$$\alpha'(t) = d\alpha_t\left(\left.\frac{d}{du}\right|_t\right) \in T_{\alpha(t)} M$$

$\forall t \in I$.

Algunas observaciones:

(1) Derivada direccional:

$\alpha : I \longrightarrow M$ curva suave

$f \in C^{\infty}(M)$

$$\therefore \quad \alpha'(t)f = d\alpha_t\left(\frac{d}{du}\Big|_t\right)(f)$$
$$= \frac{d}{du}\Big|_t (f\circ\alpha)$$
$$= (f\circ\alpha)'(t)$$

(2) $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ carta alrededor de $\alpha(t)$ ($t\in I$ fijo)

$$\alpha'(t) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{d(x^j\circ\alpha)}{du}(t)} \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\alpha(t)}$$

$$\Longrightarrow \alpha'(t)(x^j) = (x^j\circ\alpha)'(t)$$

(3) Reparametrización:

$$I \xrightarrow{h} J \xrightarrow{\alpha} M, \quad \beta = \alpha\circ h$$

$$\Longrightarrow \quad \beta'(t) = h'(t)\,\alpha'(h(t)).$$

(4) $I \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\varphi} N$ suaves

$$\Longrightarrow d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = (\varphi\circ\alpha)'(t)$$

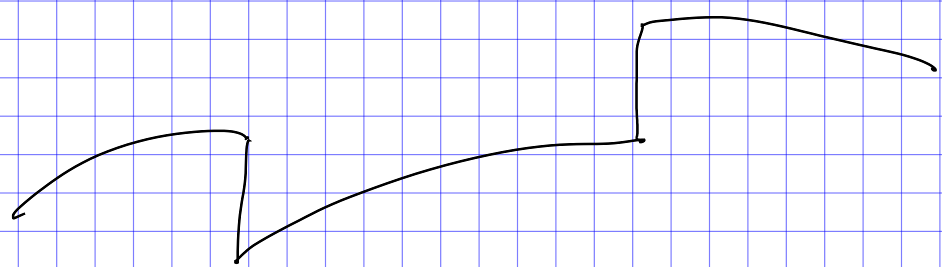
Una curva suave $\alpha : I \longrightarrow M$ se dice regular si $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$.

Una curva $\alpha : [a,b] \longrightarrow M$ se dice suave si tiene una extensión suave a un intervalo abierto $I \supseteq [a,b]$.

Curva suave a pedazos es

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow M$$

$\ni \exists$ $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ con $\alpha|_{[t_j, t_{j+1}]}$ suave $\forall j = 0, \dots, k-1$.



Campos Vectoriales.

Definición: Sea M variedad. Un campo vectorial suave sobre M es un mapeo:

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

tal que:

1) X es $\mathbb{R}$-lineal:
$$X(af+bg) = aX(f) + bX(g)$$

2) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$.

$\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, $f,g \in C^\infty(M)$.

A un tal campo también se le llama derivación de $C^\infty(M)$. El conjunto de campos suaves sobre M se denota $\mathfrak{X}(M)$ y es un espacio vectorial real.

La operación:
$$f \in C^\infty(M),\ X \in \mathfrak{X}(M)$$
$$fX : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$g \longmapsto fX(g)$$

lleva $C^\infty(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$.

Es fácil ver que con esta operación $\mathfrak{X}(M)$ forman un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$.

Además:

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

entonces $X \circ Y = XY : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ <u>NO</u> necesariamente pertenece a $\mathfrak{X}(M)$. pero:

$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$.

$\to$) Checar que $X \circ Y - Y \circ X$ es $\mathbb{R}$-lineal y satisface Leibniz.