Lema:
Para toda variedad M, el espacio de campos vectoriales suaves sobre M, denotado $\mathfrak{X}(M)$, es un módulo sobre $C^\infty(M)$ y un álgebra de Lie real.

*) $\mathfrak{X}(M)$ es espacio vectorial real.

*) $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\Longrightarrow fX \in \mathfrak{X}(M)$$

*) $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$ es álgebra de Lie:

- $[\ ,\ ]$ es $\mathbb{R}$-bilineal antisimétrica.

- $[\ ,\ ]$ satisface la identidad de Jacobi

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Algunas propiedades:

*) $[X, Y](fg) =$

$= X(Y(fg)) - Y(X(fg))$

$= X(fY(g) + Y(f)g)$

$- Y(X(f)g + fX(g))$

$= \cancel{X(f)Y(g)} + fXY(g) + XY(f)g$

$+ \cancel{Y(f)X(g)}$

$- (YX(f)g + \cancel{X(f)Y(g)} + \cancel{Y(f)X(g)}$

$+ fYX(g))$

$= f[X, Y](g) + [X, Y](f)\, g$

*) $[fX, gY] = fg[X, Y]$

$+ fX(g)Y - gY(f)X$

$\forall f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

*) $[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$

*) $\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right] = 0$ $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas en U.

*) Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces:

$$X : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

Pregunta: ¿se puede definir $X(f)$ con $f \in C^{\infty}(U)$? Sí. $U \subseteq M$ abierto.

Solución: $X \in \mathfrak{X}(M)$

$f \in C^{\infty}(U)$, $p \in U$, escogemos $\tilde{f} \in C^{\infty}(M)$ $\ni$ $\tilde{f} = f$ en una vecindad de p y definimos:

$$X(f)_p = X(\tilde{f})_p$$

(tal $\tilde{f}$ existe por el argumento con bump functions)

La definición de $X(f)_p$ no depende de la extensión $\tilde{f}$ por el siguiente:

Lema: $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^{\infty}(M)$, $p \in M$. Si $f \equiv 0$ en una vecindad de p, entonces:

$$X(f)_p = 0.$$

Dem.:

Supongamos que $f \equiv 0$ en $U \ni p$. Sea $g \in C^\infty(M)$ bump function $\ni$ $g(p) = 1$, $\operatorname{supp} g \subseteq U$

$$\therefore \quad fg \equiv 0$$

$$\therefore \quad 0 = X(fg)_p = \left(X(f)g + fX(g)\right)_p$$

$$= X(f)_p \, g(p)^{\to 1} + f(p)^{\to 0} X(g)_p$$

$$= X(f)_p$$

*) $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{X}(M) = +\infty$.

Por ejemplo:

$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \supseteq \left\{ f \frac{\partial}{\partial x^1} \;\middle|\; f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}$$

$$\underset{\mathbb{R}}{\cong} C^\infty(\mathbb{R}^n) \supseteq \mathbb{R}[x^1, \dots, x^n]$$

Elementos en $\mathfrak{X}(M)$ como campos de vectores tangentes:

$X \in \mathfrak{X}(M)$. Para todo $p \in M$:

$$X_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X_p(f) = X(f)(p)$$
$$= ev_p(X(f))$$

$\therefore$ $X_p \in T_pM$ (Checar $\mathbb{R}$-lineal y Leibniz).

Por tanto existe un mapeo:

$$\mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\Phi} \Gamma(TM)$$
$$X \longmapsto s \ni$$
$$s(p) = X_p$$
$$\forall p \in M$$

(campo de vectores tangentes)

Donde:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM \quad \text{(unión disjunta)}$$

el haz tangente de M con proyección:

$$\pi : TM \longrightarrow M$$
$$v \longmapsto p \quad \text{si } v \in T_pM$$

y $\Gamma(TM)$ es el espacio de secciones de π i.e.:

$$s \in \Gamma(TM) \iff s : M \to TM$$

$\exists\ \Delta(p) \in T_pM \quad \forall p \in M$

$(\pi \circ \Delta = id_M)$

Observamos que:

Φ es 1-1

$$\Phi(X) = 0 \implies X(f)_p = 0 \ \forall p \in M \ \forall f$$

$$\implies X(f) = 0 \quad \forall f$$

$$\implies X \equiv 0.$$

¿Φ es sobre? No.

Sea $\Delta \in \Gamma(TM)$.

Por tanto $\forall p \in M$, $f \in C^\infty(M)$:

$$\Delta(p) \in T_pM, \quad \Delta(p)f \in \mathbb{R}$$

y podemos definir X por:

$$X(f)_p = \Delta(p)f$$

¿$X(f) \in C^\infty(M)$?

Ejemplo:

Si $M = \mathbb{R}^n$, entonces toda sección $\Gamma(T\mathbb{R}^n)$ es de la forma:

$$s : \mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^n$$

$$s(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(p) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$$

donde $f_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces:

$$X(f)_p = \sum_{j=1}^{n} f_j(p) \frac{\partial f}{\partial x^j}(p).$$

$$X(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff f_1, \dots, f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

En general:

Si $s \in \Gamma(TM)$, entonces para X definido por:

$$X(f)_p = s(p)f \quad \forall p \in M, \ f \in C^\infty(M)$$

son equivalentes las siguientes condiciones:

(1) $X \in \mathfrak{X}(M)$ (i.e. $X(f) \in C^\infty(M)$ $\forall f \in C^\infty(M)$)

(2) Si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ es carta en U, y escribimos:

$$\Delta(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(p) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \quad (*)$$

$\forall p \in U$

entonces $f_j \in C^\infty(U)$ $\forall j = 1, \dots, n.$

Dem.:

(1) $\Rightarrow$ (2):

Con la expresión $(*)$ como $X(f) \in C^\infty(M)$ $\forall f \in C^\infty(M)$ entonces:

$$p \longmapsto \Delta(p) x^k \qquad p \in U$$

es suave. Luego:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(p) \frac{\partial x^k}{\partial x^j}(p) = f_k(p)$$

es C^∞ para $p \in U$.

(2) $\Rightarrow$ (1):

X, Δ siguen relacionados por:

$$X(f)_p = \Delta(p) f \quad \forall p$$

Si $f \in C^\infty(M)$: $(X(f) \in C^\infty(M)?)$

$$X(f)_p = \sum_{j=1}^{n} f_j(p) \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$$

es suave con $p \in U$.

Conclusión:

Existe una correspondencia biyectiva entre:

(1) $\mathfrak{X}(M)$

(2) secciones suaves de TM es decir $\Delta \in \Gamma(TM)$ tales que en coordenadas locales en todo punto:

$$\Delta|_U = \sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

se tiene $f_j \in C^\infty(U)$, $U \subseteq M$ abierto con coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$.

En particular, todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se escribe en coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$ en U como:

$$X|_u = \sum_{j=1}^{n} X(x^j)\frac{\partial}{\partial x^j}$$