En toda variedad M

si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^{\infty}(M)$:

$$[fX, gY](h) = \qquad (h \in C^{\infty}(M))$$

$$= fX(gY(h)) - gY(fX(h))$$

$$= fX(g)Y(h) + fgXY(h)$$

$$- (gY(f)X(h) + gfYX(h))$$

$$= fg[X, Y](h) + fX(g)Y(h)$$

$$- gY(f)X(h)$$

$$\therefore \; [fX, gY] = fg[X, Y]$$

$$+ fX(g)Y - gY(f)X$$

Sean M, N variedades

y $\varphi : M \longrightarrow N$ suave.

Entonces:

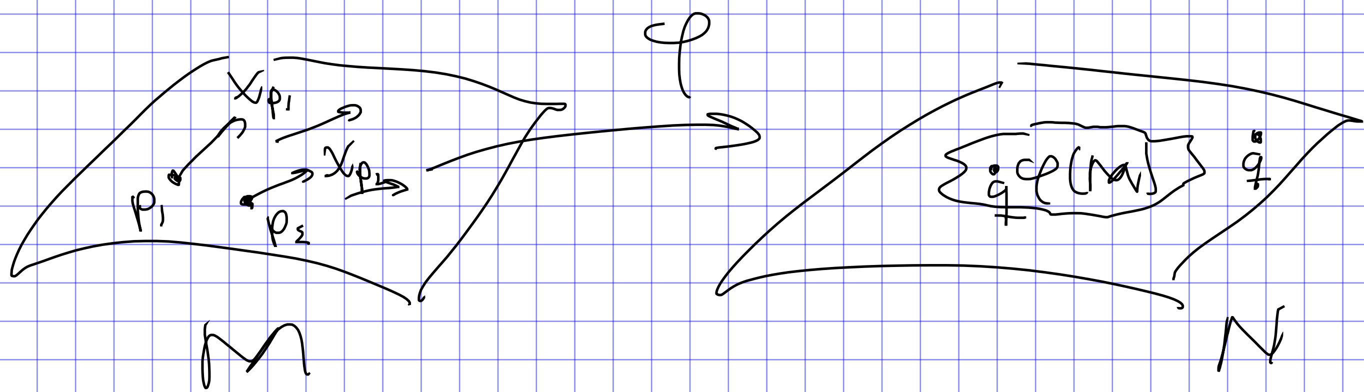
$$d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N \quad \checkmark$$

pero:

$$d\varphi : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N) \quad \times$$

no se puede definir en

general. Pues:



X $\qquad\qquad$ $d\varphi(X) = ?$

$q \notin \varphi(M)$: $d\varphi(X)_q$ no se puede definir.

Si $q \in \varphi(M)$, y $\exists\ p_1 \neq p_2$ $\exists\ q = \varphi(p_1) = \varphi(p_2)$, puede ocurrir:

$$d\varphi_{p_1}(X_{p_1}) \neq d\varphi_{p_2}(X_{p_2})$$

y $d\varphi(X)_q$ no se puede definir.

Si φ es difeomorfismo, entonces definimos:

$$d\varphi = \varphi_* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$$

$$d\varphi(X)_q = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}(X_{\varphi^{-1}(q)})$$

$\forall q \in N$.

Definición:
Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ suave y $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$.
Decimos que X, Y están φ-relacionados $X \underset{\varphi}{\sim} Y$ si:

$$d\varphi_p(X_p) = Y_{\varphi(p)} \quad \forall p \in M.$$

Lema: $\varphi : M \longrightarrow N$ suave
$X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ Entonces:

$$X \underset{\varphi}{\sim} Y \iff X(g \circ \varphi) = Y(g) \circ \varphi \quad \forall g \in C^{\infty}(N)$$

Dem.:

$$\forall p \in M: \quad d\varphi_p(X_p) = Y_{\varphi(p)}$$

$$\iff \forall p \in M,\ g \in C^{\infty}(N) \quad d\varphi_p(X_p)(g) = Y_{\varphi(p)}(g)$$

$$\iff \forall p \in M,\ g \in C^{\infty}(N) \quad X_p(g \circ \varphi) = Y_{\varphi(p)}(g)$$

$$\iff X(g \circ \varphi) = Y(g) \circ \varphi \quad \forall g \in C^{\infty}(N).$$

Hemos usado:

$$Z(h)(q) = Z_q(h).$$

De lo anterior obtenemos:

Lema:

$X_1 \underset{\varphi}{\sim} Y_1$, $X_2 \underset{\varphi}{\sim} Y_2$

$$\Rightarrow [X_1, X_2] \underset{\varphi}{\sim} [Y_1, Y_2].$$

Dem.:

$\forall g \in C^\infty(N)$:

$[Y_1, Y_2](g) \circ \varphi =$

$= Y_1(Y_2(g)) \circ \varphi - Y_2(Y_1(g)) \circ \varphi$

$= X_1(Y_2(g) \circ \varphi) - X_2(Y_1(g) \circ \varphi)$

$= X_1(X_2(g \circ \varphi)) - X_2(X_1(g \circ \varphi))$

$= [X_1, X_2](g \circ \varphi)$

Si $\varphi: M \longrightarrow N$ es difeomorfismo, entonces hemos definido:

$$d\varphi(X)_q = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}\left(X_{\varphi^{-1}(q)}\right)$$

$\forall q \in N$ si $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Si tomamos $q = \varphi(p)$: entonces:

$$d\varphi(X)_{\varphi(p)} = d\varphi_p(X_p)$$

$\forall p \in M \quad \therefore \quad X \underset{\varphi}{\sim} d\varphi(X)$

Además: $g \in C^\infty(N)$

$$d\varphi(X)(g)_{\varphi(p)} = d\varphi_p(X_p)(g)$$

$$= X_p(g \circ \varphi)$$

$$\therefore \quad d\varphi(X)(g) \circ \varphi = X(g \circ \varphi)$$

$$\therefore \quad d\varphi(X)(g) = \underbrace{X(g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}}_{\text{en } C^\infty(N)}$$

Luego:

$$d\varphi(X)(g) \in C^\infty(N)$$

$\forall g \in C^\infty(N)$. $\Rightarrow$ $d\varphi(X) \in \mathfrak{X}(N)$

1-formas.

Sea M variedad.

T_pM ✓ $p \in M$.

El espacio cotangente a M en p es el dual:

$$T_p^*M = (T_pM)^*$$
$$= T_pM^*$$

Definición: Una 1-forma Θ en M es un mapeo que a cada $p \in M$ asigna un elemento $\Theta_p \in T_p^*M$.

Si Θ es una 1-forma en M y $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces definimos:

$$\theta(X) : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto \theta_p(X_p)$$
$$\theta(X)_p = \theta(X)(p) = \theta_p(X_p)$$

Y la 1-forma θ se dice suave si

$$X \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow \theta(X) \in C^\infty(M).$$

$$\mathfrak{X}^*(M) = \{ \text{1-formas suaves en } M \}$$

$\mathfrak{X}^*(M)$ es $C^\infty(M)$-módulo con las operaciones:

$$(\theta + \omega)_p = \theta_p + \omega_p \qquad \forall p \in M.$$
$$(f\theta)_p = f(p)\,\theta_p$$

Definición:
Si $f \in C^\infty(M)$, entonces $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ es definida por:

$$df_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$df_p(v) = v(f).$$

$\forall p \in M, v \in T_pM$. df se

llama la diferencial de f.

Observaciones:

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$df(X)(p) = df_p(X_p) = X_p(f)$$

$$\therefore \quad df(X) = X(f) \in C^\infty(M).$$

$\Rightarrow$ df es suave

i.e. $df \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Por otro lado, df ya se había definido por:

$$\tilde{d}f_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$$

$$\tilde{d}f_p(v) \in T_{f(p)}\mathbb{R}$$

de modo que:

$$\tilde{d}f_p(v) = \tilde{d}f_p(v)(u)\,\frac{d}{du}\Big|_{f(p)}$$

$$= v(u \circ f)\,\frac{d}{du}\Big|_{f(p)}$$

pero $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es id:

$$= v(f)\,\frac{d}{du}\Big|_{f(p)} = v(f) = df_p(v)$$

$$T_{f(p)}\mathbb{R} \xleftrightarrow{\cong} \mathbb{R}$$

Sea M variedad con coordenadas $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ en U. Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(U), \quad dx^k \in \mathfrak{X}^*(U)$$

$$\forall j, k = 1, \dots, n$$

Tenemos:

$$dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_{jk}$$

Por tanto: $(\forall p \in U)$

$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ es base de T_pM

$dx^1_p, \dots, dx^n_p$ es base de T_p^*M

y son bases duales.

Corolario:
Si $(x^1, \dots, x^n)$ son coordenadas de M en U y $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, entonces:

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) dx^j \quad \text{en } U.$$

Comparar con: $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$X = \sum_{j=1}^{n} X(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{en } U$$

$$= \sum_{j=1}^{n} dx^j(X) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{en } U$$

Del corolario $\forall f \in C^{\infty}(M)$:

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$$

Lema: $d : C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ satisface:

(1) d es $\mathbb{R}$-lineal.

(2) $d(fg) = f\,dg + g\,df$

(3) $d(h \circ f) = (h' \circ f)\,df$ $\quad \forall h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.