Subvariedades.

Definición:
Sea M variedad. Una subvariedad de M es un par (P, φ) donde P es variedad y $\varphi : P \longrightarrow M$ satisface:

(1) φ es homeomorfismo a $\varphi(P)$.

(2) φ es suave y $d\varphi_p$ es 1-1 $\forall p \in P$.

Vía φ, P es subespacio topológico de M.

Si $p \in P$, entonces T_pP es subespacio de $T_{\varphi(p)}M$ vía $d\varphi_p$.

Si $F : M \longrightarrow N$ es suave entonces:

$$F \circ \varphi = F|_P$$

es suave.

Ejemplo modelo: $(k \leq n)$

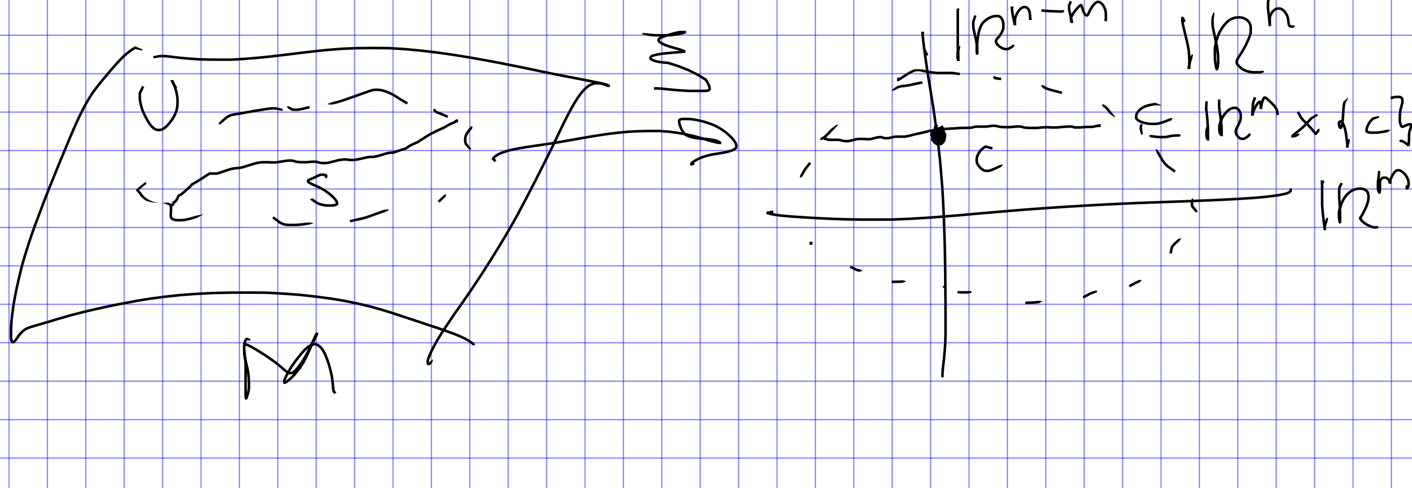
$$\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

hace a $\mathbb{R}^k$ subvariedad de $\mathbb{R}^n$ definida por $u^j = 0$, $j = k+1, \ldots, n$. Decimos que $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^n$ es una rebanada (slice).

Más generalmente, sea (ξ, U) carta de M^n. Entonces, una rebanada para las coordenadas $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ es un conjunto de la forma:

$$S = \left\{ p \in U \;\middle|\; \begin{matrix} x^{m+1}(p) = c_1 \\ \vdots \\ x^n(p) = c_{n-m} \end{matrix} \right\}$$

donde $c_1, \ldots, c_{n-m} \in \mathbb{R}$ fijos. (ξ-coordinate slice).



Observamos que:

$$\xi|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \{c\} \simeq \mathbb{R}^m$$

es homeomorfismo a un abierto en $\mathbb{R}^m$. Declarando a $\xi|_S$ como carta de S, tenemos un atlas para S que lo convierte en variedad con la topología heredada de M.

Afirmación: Con $j : S \longrightarrow M$ la inclusión, (S, j) es subvariedad de M.

(1): j es homeomorfismo a la imagen por la elección de la topología heredada en S.

(2): j es C^∞ y dj_p 1-1 $\forall p \in S$ por el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{j} & U \subseteq M \\ {\scriptstyle \xi|_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ (\mathbb{R}^m \times \{c\} \simeq) \mathbb{R}^m & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

i inclusión natural.

$$i = \xi \circ j \circ \xi|_S^{-1}$$

$$dj_p = d\xi^{-1}_{\xi(p)} \circ di_{\xi(p)} \circ d(\xi|_S)_p$$

Definición:
Sea M variedad y $P \subseteq M$ subconjunto. Una carta (ξ, U) de M se dice adaptada a P si $U \cap P$ es una rebanada para ξ.
Es decir, $\exists\, m,\ c_1, \dots, c_{n-m}$ $\ni$:

$$U \cap P = \left\{ p \in U \;\middle|\; \begin{matrix} x^{m+1}(p) = c_1 \\ x^n(p) = c_{n-m} \end{matrix} \right\}$$

La restricción ξ a $U \cap P$ la denotamos:

$$\xi_P : U \cap P \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

cuya imagen es el abierto $\xi_P(U \cap P)$ de $\mathbb{R}^m$. Por la discusión anterior $U \cap P$ es subvariedad con atlas $\{(\xi_P, U \cap P)\}$.

$\rightarrow$) Esta noción caracteriza el concepto de subvariedad.

Definición: (immersion)
Un mapeo suave $\varphi: M \to N$ se dice inmersión si $d\varphi_p$ es 1-1 $\forall p \in M$.

Proposición:
Para $\varphi: M^m \to N^n$ suave son equivalentes:

(1) φ es inmersión.

(2) $\forall p \in M$ $\exists$ cartas (ξ, U) de M, $p \in U$, (η, V) de N, $\varphi(p) \in V$, tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \supseteq U & \xrightarrow{\varphi} & V \subseteq N \\ \xi \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (u^1, \dots, u^m) & \longmapsto & (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0) \end{array}$$

$\xi(p) = 0$, $\eta(\varphi(p)) = 0$.

Dem.: (2) $\Longrightarrow$ (1) Fácil.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Fijamos $p \in M$.

Sean $(x^1, \dots, x^n)$ coordenadas

en N alrededor de $\varphi(p)$ y que manden $\varphi(p)$ a 0. Sean $(y^1, \dots, y^m)$ coordenadas en M alrededor de p y que manden p a 0. Entonces la matriz:

$$d\varphi_p \longleftrightarrow \left(\frac{\partial(x^j \circ \varphi)}{\partial y^k}(p)\right)_{j,k}$$

tiene rango $m = \dim T_pM$ y es $n \times m$ con $m \leq n$. Por tanto, $\exists$ una submatriz $m \times m$ no-singular y reordenando las coordenadas suponemos que:

$$\left(\frac{\partial(x^j \circ \varphi)}{\partial y^k}(p)\right)_{j,k=1}^{m}$$

es no-singular. Por el teorema de la función inversa el mapeo:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ q &\longmapsto (x^1 \circ \varphi(q), \dots, x^m \circ \varphi(q)) \end{aligned}$$

es difeomorfismo en una vecindad de p a una vecindad de 0 en $\mathbb{R}^m$.

Esto introduce nuevas coordenadas:

$$\tilde{y}^j = x^j \circ \varphi \qquad j = 1, \dots, m$$

en una vecindad de p.

Por otro lado podemos escribir:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "x^k \circ \varphi"] \arrow[d, "(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m) = \tilde{\xi}"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "f^k"'] & \end{tikzcd} \qquad k = m+1, \dots, n$$

es decir:

$$x^k \circ \varphi = f^k(x^1 \circ \varphi, \dots, x^m \circ \varphi)$$
$$\forall k = m+1, \dots, n$$

Consideramos en N las coordenadas:

$$(x^1, \dots, x^m, z^{m+1}, \dots, z^n) = \tilde{\eta}$$

donde:

$$z^k = x^k - f^k(x^1, \dots, x^m)$$

Vemos que $d\tilde{\eta}_{\varphi(p)}$ tiene matriz Jacobiana respecto de $(x^1, \dots, x^n)$ de la forma:

$$
\underbrace{\begin{array}{c c}
x^j & \\
z^k &
\end{array}
\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}
$$

y por TFI es que $\tilde{\eta}$ es difeomorfismo en una vecindad de $\varphi(p)$.

En estas coordenadas tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m) = \xi}"'] & N \arrow[d, "{\tilde{\eta} = (x^1, \dots, x^m, z^{m+1}, \dots, z^n)}"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$
$$u \longmapsto (u, 0)$$

pues se tiene:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\eta} \circ \varphi &= (x^1 \circ \varphi, \dots, x^m \circ \varphi, z^{m+1} \circ \varphi, \dots, z^n \circ \varphi) \\
&= (\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m, 0, \dots, 0) \quad //
\end{aligned}
$$

Proposition:
Si $\varphi : P \longrightarrow M$ es subvariedad y pensamos en φ como la inclusión, entonces $\forall p \in P \subseteq M$ $\exists$ (U, ξ) carta de M adaptada a P con $p \in U$. I.e. $U \cap P$ es una ξ-rebanada.

Dem.:

Como $\varphi : P \longrightarrow M$ es inmersión podemos hallar cartas (U, ξ), (V, η) de P y M $\ni$:

$$\begin{array}{ccc} P \supseteq U \cap P = V & \xrightarrow{\varphi} & U \subseteq M \\ \xi \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$$

es un diagrama conmutativo. Además podemos hacer esto de modo que

$$\begin{array}{l} \xi = (y^1, \ldots, y^m) \\ \eta = (x^1, \ldots, x^n) \end{array} \Rightarrow y^j = x^j \circ \varphi$$

Por el diagrama:

$$\xi(V) = \xi(U \cap P) = \eta(U) \cap \mathbb{R}^m$$

y eso implica que $U \cap P$ es η-rebanada. //