Principio básico con variedades:

*) A una variedad M se le puede transferir la información de espacios vectoriales a través de sus cartas, siempre que tal información sea preservada por los cambios de coordenadas.

Ejemplo (orientaciones)

Sea M^n variedad y (ξ, U) carta. Entonces $\forall p \in U$:

$$d\xi_p : T_pM \longrightarrow T_{\xi(p)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

$$d\xi_p^{-1}((e_1, \dots, e_n)) \longleftarrow (e_1, \dots, e_n)$$

Con la base $d\xi_p^{-1}((e_1, \dots e_n))$ el espacio vectorial T_pM adquiere una orientación que varía suavemente con $p \in U$.

Si (η, V) es otra carta y $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $\forall p \in U \cap V$ tenemos dos posibilidades:

$$
\begin{tikzcd}
d\eta_p^{-1}(\mathcal{B}_0) \arrow[dd, bend right, "A"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[dd, "d(\xi\circ\eta^{-1})_{\eta(p)}"] & (e_1,\dots,e_n)=\mathcal{B}_0 \\
 & T_pM \arrow[ur, "d\eta_p"] \arrow[dr, "d\xi_p"'] & & \\
d\xi_p^{-1}(\mathcal{B}_0) & & \mathbb{R}^n & (e_1,\dots,e_n)=\mathcal{B}_0
\end{tikzcd}
$$

Con A la matriz de cambio de base:

$d\xi_p^{-1}(\mathcal{B}_0)$ y $d\eta_p^{-1}(\mathcal{B}_0)$ definen la misma orientación

$$\iff \det(A)>0.$$

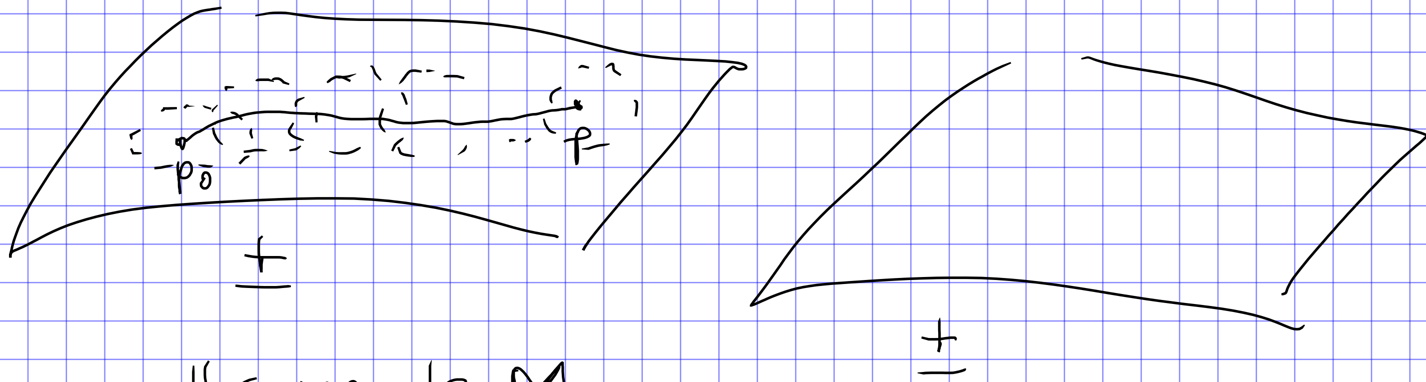
$$\iff \det(d(\xi\circ\eta^{-1})_{\eta(p)})>0.$$

La variedad M se dice orientable si $\exists$ un atlas $\{(\xi_\alpha, U_\alpha)\mid \alpha\in I\}$ de M (contenido en su atlas maximal) tal que:

$$\det(d(\xi_\alpha\circ\xi_\beta^{-1})_q)>0$$

$\forall \alpha,\beta,\ q\in\xi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$. Una orientación es una elección de un tal atlas y M con tal orientación se dice orientada.

Si M es orientable, ¿cuántas orientaciones tiene?

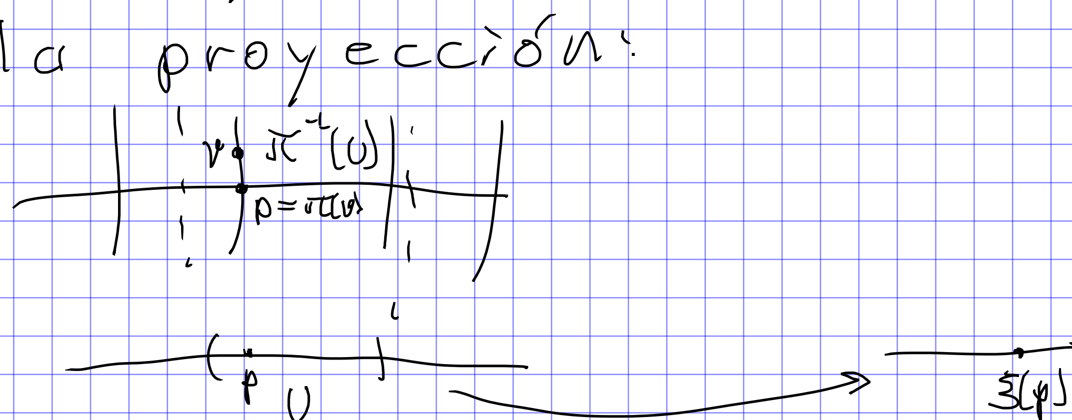


Sol: $2^{\#\text{comp. de } M}$.

TM como variedad.

Sea (ξ, U) carta de M.
Tenemos la proyección:

$$\begin{array}{c} TM \\ \big\downarrow \pi \\ M \end{array}$$



Si $v \in T_pM$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} v(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$$

donde $\xi = (x^1, \dots, x^n)$.
Se declara:

$$\tilde{\xi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \xi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

$$\tilde{\xi}(v) = (\xi(\pi(v)), v(x^1), \dots, v(x^n))$$

como carta.

Con tal estructura de variedad un campo vectorial $X: M \to TM$ satisface: $(p \mapsto X_p \in T_pM)$

$$X \in \mathfrak{X}(M) \iff X: M \to TM$$
(es C^∞) es suave como mapeo

Además $TM \to M$ es un haz (fibrado) vectorial en el sentido de que:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\tilde{\xi}"] \arrow[d] & \xi(U) \times \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ U \arrow[r, "\xi"] & \xi(U) \end{tikzcd}$$

conmuta y $\tilde{\xi}|_{\pi^{-1}(p)}: T_pM \to \mathbb{R}^n$ es isomorfismo lineal.
(Ver Kobayashi-Nomizu)
Observamos que $\pi: TM \to M$ es submersión.

Curvas integrales.

Definición:
Sea M variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$.
Una curva integral de X es una curva $\alpha : I \longrightarrow M$ tal que:

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)} \quad \forall\, t \in I.$$

Con tal definición, si (ξ, U) es carta con $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ entonces:

$$\alpha'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\alpha(t)}$$

$$X_{\alpha(t)} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\alpha(t)}$$

donde $\tilde{f}_j(p) = X_p(x^j) \quad \forall\, p \in U$.

¿ α es curva integral de X en los puntos $t \in I \ni \alpha(t) \in U$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt}(t) = \tilde{f}_j(\alpha(t)) \quad \forall\, t \in I \ni \alpha(t) \in U$$

$$\forall j = 1, \dots, n \qquad = \tilde{f}_j \circ \xi^{-1}(\xi(\alpha(t)))$$

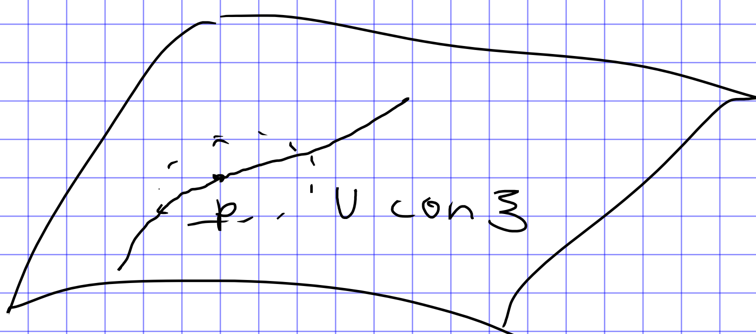
$$= f^j((x^1 \circ \alpha)(t), \dots, (x^n \circ \alpha)(t))$$

el cual es un sistema de n EDO. Por tanto, de los cursos de

EDO:

Proposición:
Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\forall p \in M$ $\exists$ una curva integral $\alpha : I \longrightarrow M$ de $X \ni \alpha(0) = p$. Cualesquiera dos de tales curvas coinciden en la intersección de sus dominios.

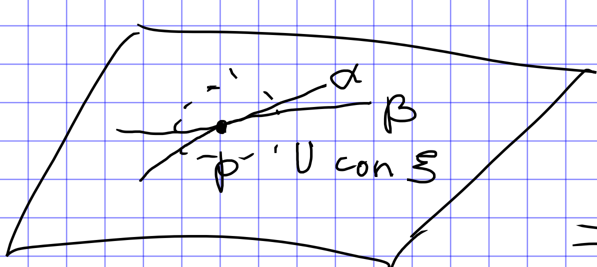
Dem.:



y se resuelve en $\mathbb{R}^n$ //

Corolario:
Si $\alpha, \beta : I \longrightarrow M$ son curvas integrales de $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ para algún $t_0 \in I \Longrightarrow \alpha \equiv \beta$ en I.

Dem.:
Sea $J = \{t \in I \mid \alpha(t) = \beta(t)\}$
$\therefore$ J es cerrado y $t_0 \in J \neq \emptyset$.
Pero además J es abierto



$t_1 \in J$
$\alpha(t_1) = \beta(t_1) = p$
$\Longrightarrow \alpha \equiv \beta$ en una vec. de t_1

$\therefore J$ abierto $\Longrightarrow J = I$ //

Sea M variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$. La curva integral maximal de X a través de p es la curva integral $\alpha_p : I_p \longrightarrow M$ dada como sigue:

$$I_p = \bigcup \left\{ I \,\middle|\, \begin{array}{l} I = \mathrm{dom}(\alpha),\ \alpha(0) = p \\ \alpha \text{ curva integral de } X \end{array} \right\}$$

$\alpha_p(t) = \alpha(t)$ donde $\alpha : I \longrightarrow M$ es cualquier curva integral de $X \ni \alpha(0) = p$ y $t \in I$.