En particular:

$$A \in \mathcal{T}^1_s(M) : A : \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$A^i_{j_1 \cdots j_s} = A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)$$
$$= dx^i\left(A\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\right)$$

Al evaluar tensores tenemos:

$$A \in \mathcal{T}^1_2(M) \qquad \xi = (x^1, \ldots, x^n) \text{ en } U$$
$$\theta \in \mathfrak{X}^*(M),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

$$A(\theta, X, Y) = \qquad \theta_i = \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \qquad X^j = X(x^j)$$
$$= A\left(\sum_{i=1}^n \theta_i \, dx^i, \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \sum_{h=1}^n Y^h \frac{\partial}{\partial x^h}\right)$$
$$= \sum_{i,j,h=1}^n \underbrace{A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right)}_{A^i_{jh}} \theta_i X^j Y^h$$

notación de Einstein: $= A^i_{jh}\, \theta_i X^j Y^h$

$\hookrightarrow$ siempre que hay dos índices repetidos uno arriba y otro abajo hay una suma.

Es fácil ver que:

$$A \in \mathcal{I}^r_s(M),\ B \in \mathcal{I}^{r'}_{s'}(M)$$

$$\Longrightarrow (A \otimes B)^{i_1 \cdots i_{r+r'}}_{j_1 \cdots j_{s+s'}} =$$

$$= A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} B^{i_{r+1} \cdots i_{r+r'}}_{j_{s+1} \cdots j_{s+s'}}$$

i's y j's en $\{1, \ldots, n\}$

Corolario:
$\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas en $U \subseteq M$, $A \in \mathcal{I}^r_s(M)$. Entonces:

$$A = \sum A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

$\longrightarrow i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s = 1, \ldots, n.$

en U.

Contracciones.

Modelo básico de operación:

$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$(X,\theta) \longmapsto \theta(X) = X(\theta)$$

que se extiende a:

$$X\otimes\theta \in \mathcal{T}^1_1(M) \qquad X\in\mathfrak{X}(M),\ \theta\in\mathfrak{X}^*(M)$$
$$X\otimes\theta \longmapsto \theta(X)$$

De ahí podemos extender a $\mathcal{T}^1_1(M)$ generales pues localmente:

$$A\in\mathcal{T}^1_1(M) \qquad A=\sum_{i,j=1}^{n} A^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$$

y definimos la contracción como el mapeo:

$$C=C^1_1 : \mathcal{T}^1_1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$C(A)=\sum_{i=1}^{n} A^i_i \quad \text{en } U$$
$$\left(=\sum_{i,j=1}^{n} A^i_j\, dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)$$

Es decir, C es el único mapeo $C^\infty(M)$-lineal $\mathcal{T}^1_1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$

tal que $C(X \otimes \theta) = \theta(X)$.
Resta checar que $C(A)$ no depende de las coordenadas $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$. Sean $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$ otras coordenadas. Entonces:

$$A^i_j = A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$
$$\tilde{A}^k_\ell = A\left(dy^k, \frac{\partial}{\partial y^\ell}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^\ell}\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad dy^k = \sum_i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} dx^i$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}^k_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$
$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x^i} A^i_j = \sum_{i=1}^n A^i_i$$

Corolario: $\exists !\ C : \mathcal{I}^1_1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$-lineal $\ni$ $C(X \otimes \theta) = \theta(X)$

$C = C^1_1$ es llamada la contracción en $\mathcal{I}^1_1(M)$.

Dado $A \in \mathcal{I}^r_s(M)$ $(r, s \geq 1)$ y para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, r\}$ $j \in \{1, \ldots, s\}$ podemos definir $C^i_j(A)$ ((i,j)-contracción) como sigue.

$$C^i_j(A) \in \mathcal{I}^{r-1}_{s-1}(M)$$

tal que $\forall\, \theta^1, \dots, \theta^{r-1} \in \mathfrak{X}^*(M)$
$X_1, \dots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M)$

$C^i_j(A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1})$ es la contracción del tensor de tipo $(1,1)$ dado por:

$$(\theta, X) \longmapsto A(\underset{\substack{\uparrow \\ i}}{\theta^1, \dots, \theta}, \dots, \theta^{r-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{X_1, \dots, X}, \dots, X_{s-1})$$

En coordenadas:

$$C^i_j(A)^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s-1}} = \sum_{h=1}^{n} A^{i_1 \dots \overset{\text{pos. } i}{h} \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots \underset{\text{pos. } j}{h} \dots j_{s-1}}$$

$A \in \mathcal{I}^2_2(M)$: (notación de Einstein)

$$C^1_2(A)^i_j = A^{hi}_{jh}, \quad C^2_2(A)^i_j = A^{ih}_{jh}$$

$A \in \mathcal{I}^1_3(M)$:

$$C^1_2(A)_{ij} = A^h_{ihj}$$

Tensores covariantes.

Tensores covariantes en M:

$$\mathcal{I}^0_s(M) \qquad s \geq 0$$

Si $\varphi: M \longrightarrow N$ es suave, entonces el pullback se define $\forall\, s \geq 0$ como:

$$\varphi^*: \mathcal{I}^0_s(N) \longrightarrow \mathcal{I}^0_s(M)$$

$$(\varphi^* A)_p(v_1, \ldots, v_s) = A_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v_1), \ldots, d\varphi_p(v_s))$$

$\forall\, p \in M$, $v_1, \ldots, v_s \in T_pM$.

En particular:

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

$\forall\, f \in \mathcal{I}^0_0(N) = C^\infty(N)$.

Es fácil ver que:

$$\varphi^*(A \otimes B) = \varphi^*(A) \otimes \varphi^*(B)$$

y si $\psi: N \longrightarrow P$, entonces:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

Como los tensores covariantes son mapeos de la forma:

$$A : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ veces}} \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

$$A(X_1, \dots, X_s)$$

podemos hablar de tensores covariantes simétricos y de antisimétricos.

Def.: Una s-forma diferencial es un tensor de tipo $(0,s)$ anti-simétrico.

Lema: Si M es n-dimensional, μ es n-forma y tenemos

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} A_i^j W_j \qquad i = 1, \dots, n$$

donde $V_i, W_j \in \mathfrak{X}(M)$, entonces:

$$\mu(V_1, \dots, V_n) = \det((A_i^j)_{i,j}) \, \mu(W_1, \dots, W_n).$$

Derivaciones tensoriales.

Definición: (tensor derivation)
En una variedad M, una derivación tensorial es un mapeo $\mathcal{D}$ que para todo $r, s \geq 0$ proporciona:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^r_s : \mathcal{I}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{I}^r_s(M)$$

$\mathbb{R}$-lineal y tal que:

(1) (Leibniz)
$$\mathcal{D}(A \otimes B) = (\mathcal{D}A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{D}B)$$

(2) $\mathcal{D}(C(A)) = C(\mathcal{D}A)$ para cualquier contracción C.

Si $f \in C^\infty(M) = \mathcal{I}^0_0(M)$, $A \in \mathcal{I}^r_s(M)$, entonces:
$$f \otimes A = fA$$

$\therefore$ Leibniz es en este caso:
$$\mathcal{D}(fA) = \mathcal{D}(f)A + f\mathcal{D}(A).$$

Si $\mathcal{D}$ es derivación (tensorial) entonces:
$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^0_0 : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$
es derivación de funciones

de funciones por Leibniz ya que $f \otimes g = fg$.

$\therefore \exists! \, X \in \mathfrak{X}(M) \ni$:

$$\mathcal{D}(f) = X(f) \quad \forall f \in C^{\infty}(M).$$

Una derivación $\mathcal{D}$ permite:

$$\mathcal{D} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

pero <u>no</u> permite definir:

$$\cancel{\mathcal{D}_p : T_pM \longrightarrow T_pM}$$

pues $\mathcal{D}$ <u>no</u> es $C^{\infty}(M)$-lineal.

Por otro lado:

Proposición: Sea $\mathcal{D}$ derivación en M y $U \subseteq M$ abierto. Entonces existe una única derivación tensorial $\mathcal{D}|_U$ en la variedad U tal que:

$$\forall A \in \mathcal{T}^r_s(M):$$

$$\mathcal{D}|_U(A|_U) = \mathcal{D}(A)|_U$$

Idea de la dem.: Usar bump functions constantes 1 en una vecindad de un punto. //

Por tanto, si $\mathcal{D}$ es derivación:

$\mathcal{D}: \mathcal{I}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{I}^r_s(M)$ ✓

$\mathcal{D}: \mathcal{I}^r_s(U) \longrightarrow \mathcal{I}^r_s(U)$ ✓

U abierto.