Idea de la demostración de la existencia y unicidad de la conexión de Levi-Civita:

Fórmula de Koszul:

$$2\langle D_V W, X\rangle = F(V, W, X)$$

$$= V\langle W, X\rangle + W\langle V, X\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle$$

$F: \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow C^\infty(M)$ se define por el lado derecho de la fórmula de Koszul. Y se prueba que es $C^\infty(M)$-lineal en X (3er argumento)

$\therefore$ $\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$ el mapeo:

$$X \longmapsto F(V, W, X)$$

es 1-forma:

$$F(V, W, \cdot) \in \mathfrak{X}^*(M)$$

Y por el siguiente resultado $\exists!$ campo vectorial suave que se denotará $D_V W \ni$:

$2\langle D_Y W, X\rangle = F(Y, W, X)$.

Proposición:
Sea M variedad pseudo-Riemanniana. Para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ definimos $V^* \in \mathfrak{X}^*(M)$ dada por:

$$V^*(X) = \langle V, X\rangle \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Entonces el mapeo $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ dado por $V \longmapsto V^*$ es un isomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos.

Dem.:

$$(fV_1 + gV_2)^*(X) =$$
$$= \langle fV_1 + gV_2, X\rangle$$
$$= f\langle V_1, X\rangle + g\langle V_2, X\rangle$$
$$= (fV_1^* + gV_2^*)(X)$$

$\therefore$ $V \longmapsto V^*$ es $C^\infty(M)$-lineal.

Recordamos que:

$\langle V, X\rangle(p) = \langle V_p, X_p\rangle$

y por ello $\langle V, X\rangle$ es $C^\infty(M)$-

bilineal en (V, X).

Sea $V \ni V^* = 0$:

$\therefore \langle V, X \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$

Si $p \in M$, $u \in T_pM$ son arbitrarios, entonces escogemos $X \in \mathfrak{X}(M) \ni X_p = u$.

Luego:

$$0 = V^*(X)(p) = \langle V, X \rangle (p)$$
$$= \langle V_p, X_p \rangle_p = \langle V_p, u \rangle_p$$

Como $\langle , \rangle_p$ es nodegenerado $\Rightarrow V_p = 0 \quad \forall p \in M$.

$\therefore V = 0$.

Luego $V \longmapsto V^*$ es inyectivo.

Sea $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Veamos que $\exists \; V \in \mathfrak{X}(M) \ni V^* = \omega$

$\forall p \in M \quad \omega_p \in T_p^*M$

y como $\langle , \rangle_p$ es nodegenerado $\exists! \; V_p \in T_pM$:

$$\omega_p(u) = \langle V_p, u \rangle_p \quad \forall u \in T_pM$$

Esto define un campo vectorial V. Tal campo satisface:

$$\langle V, X \rangle = \omega(X) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Sean $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ coordenadas en un abierto A. La fórmula anterior con $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ nos da:

$$V = \sum_{j=1}^{n} V^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k dx^k$$

$$\langle \sum_{j=1}^{n} V^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \omega_k dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} V^j g_{ji} = \omega_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Aplicando la inversa $(g^{rs})_{rs}$:

$$(\text{en } A) \quad V^j = \sum_{i=1}^{n} \omega_i g^{ij} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

que es suave pues ω y g lo son.

$\therefore V \in \mathfrak{X}(M)$ y $V^* = \omega$

Luego $V \longmapsto V^*$ es biyectivo. //

Observación:

En la construcción:

$\mathfrak{X}(M) \ni V \longmapsto V^* \in \mathfrak{X}^*(M)$.

localmente tenemos la construcción:

$\xi = (x^1, \dots, x^n)$ coordenadas

$$V^j = \sum_{i=1}^{n} \omega_i g^{ij}, \quad \omega_i = \sum_{j=1}^{n} V^j g_{ij}$$

lo cual nos permite escribir V en términos de ω y ω en términos de V.

¿dependencia de coordenadas?

Sean $\eta = (y^1, \dots, y^n)$ otras coordenadas. Con ellas tenemos:

$$\tilde{V}^j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i \tilde{g}^{ij}, \quad \tilde{\omega}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}^j \tilde{g}_{ij}$$

Sabemos que:

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}_{ij}\, dy^i \otimes dy^j$$

$$\left(g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \ \tilde{g}_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right)$$

Como $dy^i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^h} dx^h$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,l=1}^{n} \tilde{g}_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^h} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} dx^h \otimes dx^l =$$

$$= \sum_{h,l=1}^{n} g_{hl}\, dx^h \otimes dx^l$$

$$\Rightarrow \quad g_{hl} = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^h} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \quad \otimes$$

Similarmente, si $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ es dada:

$$\omega_h = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i \frac{\partial y^i}{\partial x^h}$$

Afirmación (la del libro)

$$\sum_h \omega_h g^{hl} \quad y \quad \sum_i \tilde{\omega}_i \tilde{g}^{ij}$$

define el mismo campo vectorial. Es decir:

$$\sum_{h,l=1}^{n} \omega_h g^{hl} \frac{\partial}{\partial x^l} = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{\omega}_i \tilde{g}^{ij} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Es una talacha que comienza en el lado izquierdo substituyendo las identidades:

$$\omega_h = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i \frac{\partial y^i}{\partial x^h}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$\otimes$ nos dice:

$$(g_{hl})_{hl} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^h}\right)_{ih} (\tilde{g}_{ij})_{ij} \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^l}\right)_{jl}$$

y tomando inversa:

$$g^{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \tilde{g}^{ij} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}$$

Se substituyen en el lado izquierdo estas tres ecuaciones para llegar al lado derecho.

En las construcciones:

$$\mathfrak{X}(M) \ni V \longmapsto V^* \in \mathfrak{X}^*(M)$$

$$\mathfrak{X}^*(M) \ni \omega \longmapsto V \ni V^* = \omega$$

V y V^* ó V y ω se dicen métricamente equivalentes. Localmente se definen:

$$V \leftrightarrow V^i \longmapsto \omega \leftrightarrow \omega_h = \sum_{i=1}^{n} V^i g_{ih}$$

(lower the index)

$$\omega \leftrightarrow \omega_i \longmapsto V \leftrightarrow V^h = \sum_{i=1}^{n} \omega_i g^{ih}$$

(raise the index)

Libre de coordenadas:

$$v \longmapsto v^* = C_1^1(v \otimes g) =$$
$$= g(v, \cdot)$$

$$\omega \longmapsto v = C_1^1(\omega \otimes g^{-1})$$

$$g^{-1} = \sum_{j,h=1}^{n} g^{hl} \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Se puede generalizar esta idea para definir operaciones:

$$\mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{r+1}_{s-1}(M)$$
$$\searrow \mathcal{T}^{r-1}_{s+1}(M)$$

siempre que M sea pseudoRiemanniana.
(contracción métrica)

Como consecuencia $\exists !$ campo vectorial $D_v W \in \mathfrak{X}(M)$ $\ni$:

$$2\langle D_v W, X\rangle = F(V, W, X) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Resta checar que $D_v W$ satisface (1) - (5), lo cual se hace de esta última identidad.