Fórmula de Koszul:

$$2\langle D_V W, X\rangle =$$
$$= V(\langle W, X\rangle) + W(\langle V, X\rangle) - X(\langle V, W\rangle)$$
$$+ \langle V, [X, W]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle$$

Observación:

(M, g) pseudo-Riemanniana

$$\therefore \quad \mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}^*(M)$$
$$V \longmapsto g(V, \cdot) = \langle V, \cdot\rangle$$

En particular $\forall f \in C^\infty(M)$ $\exists!$ campo vectorial $\mathrm{grad}(f)$ $\ni$:

$$df = \langle \mathrm{grad} f, \ \rangle$$

$$df \longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$\mathrm{grad} f \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij}$$

En $\mathbb{R}^n$ $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$ y:

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$$

(M,ω) es variedad simpléctica

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M)$$
$$V \longmapsto \omega(V,\cdot)$$

es isomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos.

Si $f \in C^\infty(M)$, entonces el campo Hamiltoniano X_f es el único campo vectorial $\ni$:

$$df = \omega(X_f, \cdot).$$

Definición:
Sea M variedad pseudo-Riemanniana con coordenadas $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ en $A \subseteq M$ abierto. Los símbolos de Schwarz-Christoffel de la conexión de Levi-Civita D son $\Gamma_{ij}^h \in C^\infty(A)$ dadas por:

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{h=1}^{n} \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

Γ_{ij}^h <u>no</u> son componentes de un tensor.

Algunas propiedades:

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

$$\therefore \quad \Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h \quad \forall i, j, h$$

Sea $W = \sum_{j=1}^n W^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Entonces:

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{j=1}^n W^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + W^j D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + W^j \sum_{h=1}^n \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right)$$

$$\therefore \quad D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{j=1}^n W^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial W^h}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^h W^j \right) \frac{\partial}{\partial x^h}$$

$$\therefore \; D_{\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{j=1}^{n} w^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial w^h}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{h} v^i w^j \right) \frac{\partial}{\partial x^h}$$

Tomando $\frac{\partial}{\partial x^i}$ para V, W, X en Koszul obtenemos:

$$2 \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right\rangle \right) - \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \right)$$

$$\therefore \; 2 \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} \overbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right\rangle}^{= g_{lh}}$$

$$= \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}$$

Multiplicando por la inversa de g_{lh}:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Ejemplo:

Para $\mathbb{R}^n_\nu$: (coordenadas canónicas)

$$g_{ij} = \delta_{ij}\, \varepsilon_j \qquad \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & j = 1, \dots, \nu \\ -1 & i = \nu+1, \dots, n \end{cases}$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = 0$$

$\therefore$ D Levi-Civita es:

$$D_V \left(\sum_{j=1}^{n} W^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{j=1}^{n} V(W^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Definición: Sea M pseudo-Riemanniana con conexión de Levi-Civita D. Para todo campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ la derivada covariante D_V respecto de V en M es la única derivación tensorial en M tal que:

$$C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M), \quad \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$f \longmapsto V(f) \qquad\qquad W \longmapsto D_V W$$

La cual existe ya que se cumple:

$$D_V(fW) = V(f)W + f D_V W$$

En particular:

$\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$:

$$(D_V \omega)(X) = V(\omega(X)) - \omega(D_V X)$$

$B \in \mathfrak{I}^1_2(M)$

$B: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$

$$(D_V B)(X, Y) = D_V(B(X, Y)) - B(D_V X, Y) - B(X, D_V Y)$$

La linealidad en V sobre $C^{\infty}(M)$ del mapeo:

$$\mathfrak{I}^r_s(M) \longrightarrow \mathfrak{I}^r_s(M)$$
$$B \longmapsto D_V B$$

nos permite definir como sigue:

Definición: La diferencial covariante de un tensor $B \in \mathcal{T}^r_s(M)$ es el tensor de tipo $(r, s+1)$ dado por:

$$(DB)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) =$$

$$= (D_V B)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$$

$$= V(B(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s))$$

$$- \sum_{j=1}^{r} B(\theta^1, \dots, D_V\theta^j, \dots, X_s)$$

$$- \sum_{j=1}^{s} B(\theta^1, \dots, X_1, \dots, D_V X_j, \dots, X_s)$$

Notación:

En coordenadas se utiliza la siguiente convención:

$$A \in \mathcal{T}^r_s(M)$$

$$A \longleftrightarrow A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

$$DA \in \mathcal{T}^r_{s+1}(M)$$

$$DA \longleftrightarrow A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s; k}$$

Como D_V es derivación tensorial, satisface Leibniz:

$$D_V(A \otimes B) = (D_V A) \otimes B + A \otimes (D_V B)$$

$\therefore$ $\forall A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $D_V A$ calcula la variación de A en la dirección de V según la mide Levi-Civita.

$\therefore$ $D_V A = 0$ "significa" que A es "constante" en la dirección de V

$$DA = 0 \iff D_V A = 0 \quad \forall V$$

"significa" que A es "constante" en M en toda dirección.

Definición: Un tensor A se dice paralelo si $DA = 0$.

Ejemplo:

$f \in C^\infty(M) \in \mathcal{T}^0_0(M)$

$\forall V \in \mathfrak{X}(M)$

$$Df = 0 \iff D_V f = 0 \iff V(f) = 0$$

$\iff f$ constante en las componentes conexas de M.

$W \in \mathfrak{X}(M)$ paralelo

$\iff D_V W = 0 \quad \forall V \in \mathfrak{X}(M)$

Observación:

M pseudo-Riemanniana

D conexión de Levi-Civita.

Como $(V, A) \longmapsto D_V A$ es $C^\infty(M)$-lineal en V entonces podemos definir $D_v \quad \forall v \in T_pM$, $p \in M$ como sigue:

$$A \in \mathfrak{T}^r_s(M), \ p \in M, v \in T_pM$$

$$D_v A = (D_V A)(p)$$

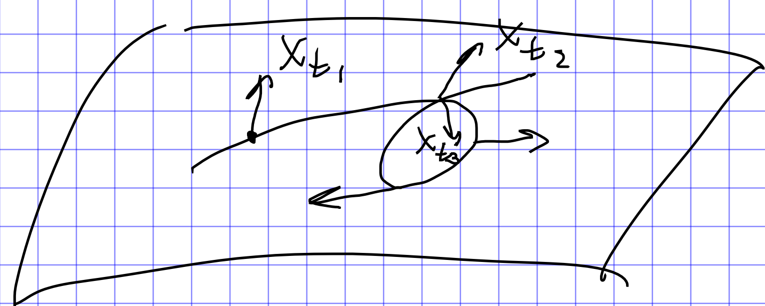
donde V es cualquier campo $V \in \mathfrak{X}(M) \ni V_p = v$.

Transporte paralelo.

Sea M variedad y $\alpha : I \longrightarrow M$ curva suave.
Un campo suave a lo largo de α es una función suave:

$$X : I \longrightarrow TM$$

tal que $X_t = X(t) \in T_{\alpha(t)}M \quad \forall t \in I$



El conjunto de tales campos se denota $\mathfrak{X}(\alpha)$.

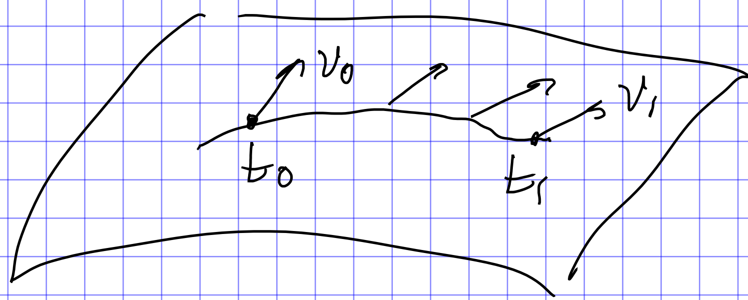
Veremos que en una variedad pseudo-Riemanniana se puede construir como sigue:

*) $\exists!$ "derivación" $\mathfrak{X}(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$

$$Z \longmapsto Z'$$

*) $\forall Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ $\quad Z' = 0$ es una EDO y $\therefore$ $\forall\, t_0 \in I$ y $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$ $\quad \exists!\; Z \in \mathfrak{X}(\alpha) \ni:$

$$\underline{Z' = 0}\ , \quad Z_{t_0} = v_0$$



$$v_1 = Z_{t_1}$$