Definición: M pseudo-Riemanniana se dice geodésicamente completa si toda geodésica maximal está definida en $\mathbb{R}$.

Observación:

Si $\alpha : I \longrightarrow M$ es geodésica

$\Longrightarrow \langle \alpha', \alpha' \rangle' = 2 \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$

$\therefore \langle \alpha', \alpha' \rangle$ es constante y entonces decimos que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha \text{ es espacial} & \Longleftrightarrow \langle \alpha', \alpha' \rangle > 0 \\ \alpha \text{ es nula o de luz} & \Longleftrightarrow \langle \alpha', \alpha' \rangle = 0 \\ \alpha \text{ es temporal} & \Longleftrightarrow \langle \alpha', \alpha' \rangle < 0. \end{array} \right.$$

$\longrightarrow$ carácter causal de α.

Sea $\gamma : I \longrightarrow M$ curva, $h : J \longrightarrow I$ difeomorfismo

$\therefore \gamma \circ h : J \longrightarrow M$ es reparametrización de γ.

Entonces:

$$(\gamma \circ h)' = h'(\gamma' \circ h)$$

$$(\gamma \circ h)'' = h''(\gamma' \circ h) + (h')^2 \gamma'' \circ h$$

$\therefore$ si γ es geodésica no constante ($\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$) entonces:

$\gamma \circ h$ es geodésica

$$\iff h'' \equiv 0 \iff h(t) = ta + b$$

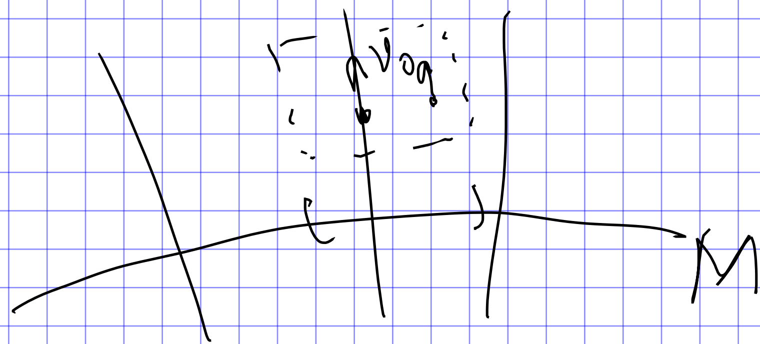
$\alpha : I \longrightarrow M$ se dice pregeodésica ssi (def.) $\exists$ una reparametrización $\gamma = \alpha \circ h$ que es geodésica.

Por los resultados de EDO:

Lema: $\forall\, v_0 \in TM \ \exists\, N \subseteq TM$ abierto con $v_0 \in N$ y $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto con $0 \in I$ $\Rightarrow \forall\, v \in N \ I_v = \mathrm{dom}(\gamma_v) \supseteq I$ y $\exists$ el mapeo:

$$\begin{aligned} N \times I &\longrightarrow M \\ (v, t) &\longmapsto \gamma_v(t) \end{aligned}$$

es C^∞.



$0 \in I \subseteq \mathbb{R}$

Proposición:
Sea M variedad pseudo-Riemanniana. Entonces $\exists$ $G \in \mathfrak{X}(TM)$ tal que la asignación:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{curvas int.}\\ \text{de } G\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{geodésicas}\\ \text{en } M\end{array}\right\}$$

$$\alpha \longmapsto \pi \circ \alpha$$

($\pi : TM \longrightarrow M$ la proyección natural)

es biyectiva.

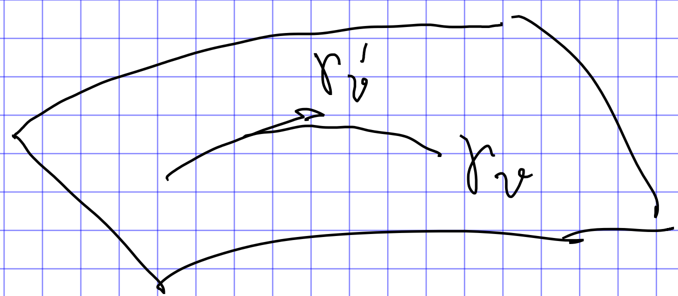
Dem.: (resumida).

$G = ?$

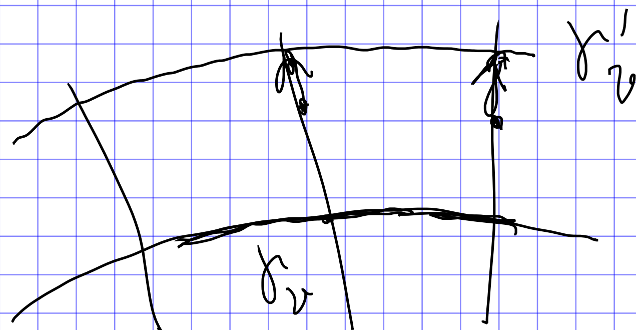
G se define:

$$TM \ni v \rightsquigarrow \gamma_v : I_v \longrightarrow M$$
$$\rightsquigarrow \gamma_v' : I_v \longrightarrow TM$$

$$\longrightarrow G_v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_v'(t) \in T_v TM$$
$$\hookrightarrow \gamma_v'(0)$$



$$\gamma_v'' = \frac{D\gamma_v'}{dt} \in \mathfrak{X}(\gamma_v)$$



$\frac{d}{dt}\Big|_t \gamma_v'$ consta de vectores en $T(TM)$

$\therefore$ $G \in \mathfrak{X}(TM)$ por el lema anterior.

Por definición de G, las curvas integrales de G son las curvas:

$$\gamma_v' : I \longrightarrow TM$$

pues:

$$\otimes \quad \frac{d}{dt}\Big|_t \gamma_v' = G_{\gamma_v'(t)} \quad \forall t \in I$$

se verifica como sigue.

(*) se cumple en $t=0$ por definición de G y porque $\gamma_v'(0) = v$.

En el caso general de t tomamos:

$$\alpha(s) = \gamma_v(t+s)$$

$\therefore$ α es geodésica maximal y se cumple:

$$\alpha'(0) = \gamma_v'(t)$$

$$\therefore \quad \alpha = \gamma_{\gamma_v'(t)} \quad \left(\gamma_v(t+s) = \gamma_{\gamma_v'(t)}(s)\right)$$

Luego:

$$G_{\gamma_v'(t)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma'_{\gamma_v'(t)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha'$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t} \gamma_v'$$

Además: $\pi \circ \gamma_v' = \gamma_v$

(En general:

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M \quad \forall t \in I$$

$$\therefore \quad \pi(\alpha'(t)) = \alpha(t) \quad \forall t \in I)$$

//

Teorema: Si M es Riemanniana compacta $\Rightarrow$ M es geodésicamente completa.

Dem.:

Por probar $v \in TM \Rightarrow$ $I_v = dom(\gamma_v) = \mathbb{R}$.

Si $v \in TM$ y $c > 0$, entonces:

$$\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct) \quad \forall t \in I_{cv}$$

Además $t \in I_{cv} \Leftrightarrow ct \in I_v$

$$\Leftrightarrow t \in c^{-1} I_v$$

$$\therefore \quad I_{cv} = c^{-1} I_v$$

$$\therefore \quad dom(\gamma_v) = \mathbb{R}$$

$$\iff \operatorname{dom}(\gamma_{cv}) = \mathbb{R}.$$

$$\therefore \operatorname{dom}(\gamma_v) = \mathbb{R}$$

$$\iff \operatorname{dom}\left(\gamma_{\frac{v}{\|v\|}}\right) = \mathbb{R}$$

$$(v \neq 0)$$

Conclusión: M es geodésicamente completa

$$\iff \operatorname{dom}(\gamma_v) = \mathbb{R} \quad \forall v \in TM$$

con $\|v\| = 1$.

Sea $UTM = \{v \in TM \mid \|v\| = 1\}$

(Recordemos que:

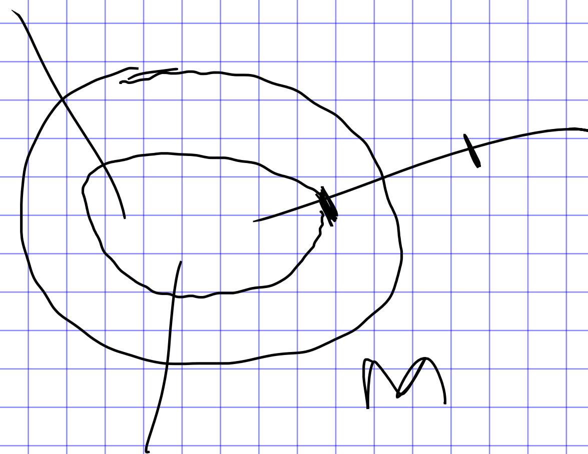
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}\ )$$

Se prueba que:

$*)$ UTM es compacto

$**)$ $G|_{UTM} \in \mathfrak{X}(UTM)$

$*)$: TM tiene fibras $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ pero UTM tiene fibras $UT_pM \cong S^{n-1}$.



$**)$: $v \in UTM$

$\therefore$ $\gamma_v'(t) \in UTM$ $\forall t \in I_v$

pues $\langle \gamma_v'(t), \gamma_v'(t) \rangle$ es constante.

$\therefore$ $t \longmapsto \gamma_v'(t)$ es curva en UTM

$\therefore$ $G_v \in T_v(UTM)$.

Por resultados de curvas integrales $*)$ y $**)$ $\Longrightarrow$ las curvas integrales de G, que son γ_v', estan definidas en $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\forall v \in UTM$

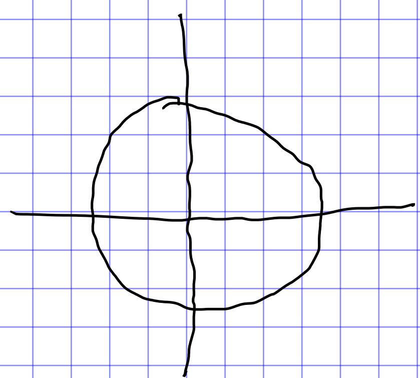
$\mathrm{dom}(\gamma_v) = \mathbb{R}$.

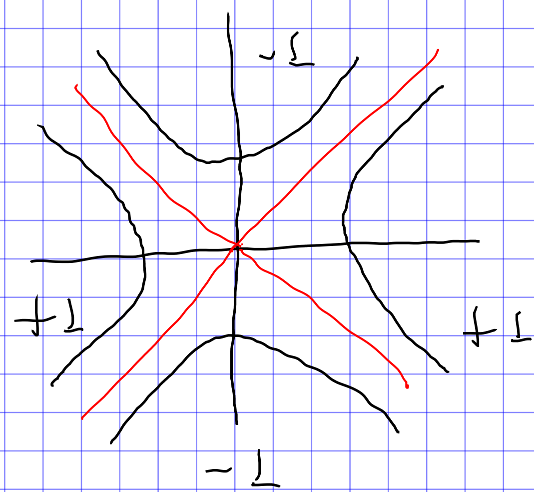
//

Comparar Riemanniano con pseudo-Riemanniano:

T_pM: $(1,1)$

$n=2$





UTM

$\downarrow$ M: compacto si M lo es

$\downarrow$ M: nunca compacto.

Mapeo exponencial.

Sea M variedad pseudo_Riemanniana.

Sea $\mathcal{D} = \{v \in TM \mid [0,1] \subseteq \underset{\substack{\updownarrow \\ \gamma_v}}{I_v}\}$

Por los mismos cálculos de la demostración anterior:

$$\forall v \in TM,\ c > 0:$$

$$I_{cv} = c^{-1} I_v$$

$\therefore$ dado $v \in TM$ si

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I_v$$

$$\therefore \quad [0,1] \subseteq (-2,2) = \frac{2}{\varepsilon}(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \frac{2}{\varepsilon} I_v = I_{\frac{\varepsilon}{2} v}$$

$\therefore$ $\mathcal{D}$ es abierto no vacío vecindad de

$$\bigcup_{p \in M} \{0_p \mid 0_p \in T_pM\}$$

El mapeo exponencial se define:

$$\exp : \mathcal{D} \subseteq TM \longrightarrow M$$

$$\exp(v) = \gamma_v(1)$$

y la exponencial en $o \in M$:

$$\exp_o : \underbrace{\mathcal{D} \cap T_oM}_{\mathcal{D}_o} \longrightarrow M$$

$$\exp_o(v) = \gamma_v(1)$$

¿ $\exp$, $\exp_o$ son suaves.