Curvatura.

M, g, D variedad pseudo-Riemanniana.

El tensor de curvatura de M es:

$$R : \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$R_{XY}Z = R(X,Y)Z$$
$$= D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z$$

$$\therefore \quad R_{XY} = R(X,Y) = D_{[X,Y]} - [D_X, D_Y]$$

(Obs.: Para algunos otros autores:

$$R(X,Y) = [D_X, D_Y] - D_{[X,Y]}$$)

Sabemos que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0 \quad \text{en } C^\infty(M)$$

pero $[D_X, D_Y] \neq 0$ en general en $\mathfrak{X}(M)$.

Por tanto:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -\left[D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}, D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\right]$$

y entonces R mide la no_conmutatividad de D_X, D_Y entre sí.

Para $\mathbb{R}^n$ con un producto interno constante:

$$D^0_X Y = X(Y) = (X(Y^1), \dots, X(Y^n))$$

$$\therefore\ R^0_{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}(Y) = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right](Y) = 0$$

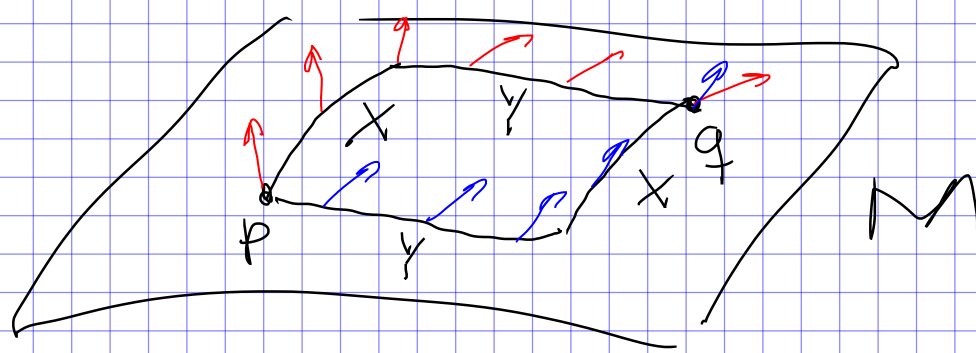
$$\therefore\ R^0 \equiv 0 \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

Si M, g, D es arbitraria, entonces tenemos:

(*) $D \rightsquigarrow \frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$

(*) $\frac{D}{dt}$ determina el transporte paralelo.

(*) transporte paralelo depende de la curva, y en general no hay conmutatividad en el diagrama:



Afirmación: Si tomamos $q \longrightarrow p$ entonces este diagrama da lugar a $-[D_X, D_Y]$

Por otro lado:

V paralelo para X
$\iff D_X V = 0$

$\therefore$ V paralelo para X y luego para Y
$\iff D_Y D_X V = 0$

Si $R_{XY} \neq 0 \longrightarrow$ $\not\iff D_X D_Y V = 0$
$\iff$ V paralelo para Y y luego para X.

Lema:

$$R : \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

es $C^\infty(M)$ - trilineal y por tanto define un tensor de tipo $(1,3)$ $(R \in \mathcal{T}^1_3(M))$:

$$R_p : (T_pM)^3 \longrightarrow T_pM$$

$$x, y, z \in T_pM^3$$

$$(R_p)_{x,y} z = (R_{XY} Z)_p$$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \ni$

$$X_p = x, \quad Y_p = y, \quad Z_p = z.$$

Dem.: Sencilla:

$$f R_{XY} Z = R_{fXY} Z = R_{XfY} Z$$

$$= R_{XY}(fZ)$$

$$D_{[fX,Y]} Z - [D_{fX}, D_Y] Z = \cdots \quad //$$

Definición: M pseudo-Riemanniana.
$\forall p \in M$, $X, Y \in T_pM$:
$$R_{XY} : T_pM \longrightarrow T_pM$$
$$Z \longmapsto R_{XY} Z = R(X,Y)Z$$
se conoce como el operador de curvatura en p.

Proposición:
$\forall X, Y, Z, V, W \in T_pM$ se cumple:

(1) $R_{XY} = -R_{YX}$

(2) $\langle R_{XY} V, W \rangle = -\langle V, R_{XY} W \rangle$

(3) $R_{XY} Z + R_{YZ} X + R_{ZX} Y = 0$
(La identidad de Bianchi)

(4) $\langle R_{XY} V, W \rangle = \langle R_{VW} X, Y \rangle$

Todas se siguen de la definición:
$$R_{XY} Z = D_{[X,Y]} Z - [D_X, D_Y] Z$$
Luego (1) es claro.

Para (2) basta ver que:

$$\langle R_{XY} V, V \rangle = 0$$

Además podemos suponer en lo sucesivo que $[\,,\,]$ de campos es cero. Esto se puede hacer extendiendo:

$$X = \sum_i \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{a^i} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \longrightarrow X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

en U

$$Y = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \longrightarrow Y = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\therefore \; [X, Y] = 0 \; \ldots$$

Luego:

$$\langle R_{XY} V, V \rangle = -\langle [D_X, D_Y] V, V \rangle$$

$$= \langle D_Y D_X V, V \rangle - \langle D_X D_Y V, V \rangle$$

$$= Y \langle D_X V, V \rangle - \cancel{\langle D_X V, D_Y V \rangle}$$

$$- \left(X \langle D_Y V, V \rangle - \cancel{\langle D_Y V, D_X V \rangle} \right)$$

$$= Y\left(\frac{1}{2} X \langle V, V \rangle\right) - X\left(\frac{1}{2} Y \langle V, V \rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2} [Y, X] \langle V, V \rangle = 0.$$

Para ver (3):

$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$?

Si $F : \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$

y definimos:

$(\mathfrak{S} F)(X, Y, Z) =$

$= F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y)$

entonces $\mathfrak{S} F$ es invariante bajo permutaciones cíclicas.

$\therefore \ R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y =$

$= (\mathfrak{S} R)_{XY} Z$

$= - \mathfrak{S} [D_X, D_Y] Z$

$= \mathfrak{S} D_Y D_X Z - \mathfrak{S} D_X D_Y Z$

$= \mathfrak{S} D_X \underbrace{D_Z Y} - \mathfrak{S} D_X \underbrace{D_Y Z}$

$= \mathfrak{S} D_X [Z, Y] = 0$

Para ver (4):
Por (3):

$$\langle \nabla R_{YV} X, W \rangle = 0$$

y seguir el libro.

Denotamos:

$$O(T_pM, \langle\,,\rangle_p) = O(T_pM)$$
$$= \{ T \in GL(T_pM) \mid \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle \ \forall v \in T_pM \}$$

cuya álgebra de Lie es:

$$so(T_pM, \langle\,,\rangle_p) = o(T_pM)$$
$$= \{ T \in End(T_pM) \mid \langle Tu, v \rangle = -\langle u, Tv \rangle \ \forall u, v \in T_pM \}$$

Si (r, s) es la signatura de M, entonces:

$$O(T_pM) \cong O(r, s)$$
$$so(T_pM) \cong so(r, s)$$

Las propiedades (1), (2) dicen que:

$$R: T_pM \times T_pM \longrightarrow so(T_pM)$$
$$(X,Y) \longmapsto R_{XY}$$

es antisimétrico en X,Y, y por tanto R es una 2-forma valores en $so(T_pM)$.

Proposición: (2da identidad de Bianchi)
$\forall\, X,Y,Z \in T_pM$:

$$D_Z R(X,Y) + D_X R(Y,Z) + D_Y R(Z,X) = 0$$

(Pero $D_Z R \neq 0$ en general, comparar con $D_Z g = 0$)

(M es espacio localmente simétrico $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $DR = 0$)

Recordamos:
$$(D_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z))$$

$$- g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z) = 0$$

$$(D_Z R)(X, Y)V =$$
$$= D_Z(R(X,Y)V) - R(D_Z X, Y)V$$
$$- R(X, D_Z Y)V - R(X,Y)(D_Z V)$$

Para la demostración hay que permutar cíclicamente y sumar.