Ejemplo:

$$A \in \mathcal{I}^2_2(M) \quad y \quad B = \downarrow^1_2 A \in \mathcal{I}^1_3(M)$$

$$B(\theta, X, Y, Z) = A(Y^*, \theta, X, Z)$$

Sean ∂_i, dx^j coordenadas.

$$\partial_i^* = \sum_j g_{ij}\, dx^j$$

$$\partial_i^* = g(\partial_i, \cdot)$$
$$= \sum_{h,j} g_{hj}\, dx^h \otimes dx^j (\partial_i, \cdot)$$
$$= \sum_j g_{ij}\, dx^j$$

$$\therefore B^i_{jhl} = B(dx^i, \partial_j, \partial_h, \partial_l)$$
$$= A(\partial_h^*, dx^i, \partial_j, \partial_l)$$
$$= \sum_m g_{hm} A(dx^m, dx^i, \partial_j, \partial_l)$$

$$= \sum_m g_{\underset{1}{h}\underset{2}{m}} A^{\overset{1}{m}\overset{2}{i}}{}_{\underset{3}{j}\underset{4}{l}}$$

$$\therefore \quad B = C^1_2(g \otimes A)$$

$$\therefore \quad \downarrow^1_2 = C^1_2(g \otimes \cdot\,)$$

En general $\forall\ 1 \le a \le r$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 \le b \le s+1$

$$\downarrow^a_b = C(g \otimes \cdot\,)$$

con C alguna contracción.

Similarmente tenemos:

$$1 \le a \le r+1$$

$$1 \le b \le s$$

$$\uparrow^a_b : \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{r+1}_{s-1}(M)$$

$$(\uparrow^a_b A)(\theta^1, \dots, \theta^{r+1}, X_1, \dots, X_{s-1}) =$$

$$= A(\theta^1, \dots, \hat{\theta}^a, \dots, \theta^{r+1}, X_1, \dots, \underset{\uparrow\ \text{pos. } b}{X}, \dots, X_{s-1})$$

$\ni \quad \Theta^a = X^*$

Observamos que:

$\forall\, a, b \ \exists\, c, d \ \ni$:

$$\downarrow^c_d \uparrow^a_b = \mathrm{id}_{\mathcal{T}^r_s(M)}$$

y similarmente:

$$\uparrow^b_a \downarrow^c_d = \mathrm{id}.$$

Ejemplo:

$A \in \mathcal{T}^2_2(M)$:

$$A^{ij}_{kl} \rightsquigarrow \sum_m g_{km} A^{mi}_{jl}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k,m} g^{rk} g_{km} A^{mi}_{jl}$$

$$= \sum_m \delta^r_m A^{mi}_{jl} = A^{ri}_{jl}$$

Como:

$$dx^i \longleftrightarrow \sum_j g^{ij} \partial_j$$

bajo $\mathfrak{X}(M) \overset{\simeq}{\Longrightarrow} \mathfrak{X}^*(M)$, entonces:

por ejemplo:

$$B \in \underset{\sim}{T}^1_3(M)$$

$$\uparrow^1_2 B \in \underset{\sim}{T}^2_2(M)$$

$$\Longrightarrow (\uparrow^1_2 B)^{ij}_{hl} = \sum_q g^{iq} B^j_{hql}$$

y en general $\forall a, b$:

$$\uparrow^a_b = C(g^{-1} \otimes \cdot)$$

C una contracción.

$g^{-1} \in \underset{\sim}{T}^2_0(M)$ con componentes g^{ij}

Notación: Cualesquiera dos tensores A, B para los cuales se puede escribir:

$$A = \uparrow^{a_1}_{b_1} \downarrow^{a_2}_{b_2} \dots (B)$$

se dicen metricamente equivalentes.

Ejemplo fundamental:

$R \in \mathcal{I}^1_3(M)$ tensor de curvatura.

$$R_{XY} Z = D_{[X,Y]} Z - [D_X, D_Y] Z$$

Sus componentes se toman como:

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R^i_{jkl} \partial_i$$

y por ello como tensor en $\mathcal{I}^1_3(M)$:

$$R(Z, X, Y) = R_{XY} Z$$

y R considerado como

tensor en $\mathcal{I}^0_4(M)$ es:

$$\left(\downarrow^1_1 R\right)_{ijkl} = \left(\downarrow^1_1 R\right)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$$
$$= \langle \partial_i, R(\partial_j, \partial_k, \partial_l)\rangle$$
$$= \langle \partial_i, R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j)\rangle$$
$$= \langle \partial_i, \sum_m R^m_{jkl}\, \partial_m \rangle$$
$$= \sum_m g_{im} R^m_{jkl}.$$

Por la equivalencia métrica escribimos:

$$R = \downarrow^1_1 R$$

//

Recordamos:

$$\left(C^a_b A\right)^{i_1 \cdots}_{j_1 \cdots} = \sum_m A^{i_1 \cdots \overset{a}{\downarrow}{m} \cdots}_{j_1 \cdots \underset{b}{\uparrow}{m} \cdots}$$

$$C^a_b : \mathcal{I}^r_s \longrightarrow \mathcal{I}^{r-1}_{s-1}$$

Ahora definimos:

$$C_{ab} : \underset{\sim}{\mathcal{T}}^r_s(M) \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{T}}^r_{s-2}(M)$$

$$C_{ab}(A)^{i_1 \cdots\cdots i_r}_{j_1 \cdots\cdots j_{s-2}} = \sum_{p,q} g^{pq} A^{i_1 \cdots\cdots i_r}_{j_1 \cdots \underset{\overset{\uparrow}{a}}{p} \cdots \underset{\overset{\uparrow}{b}}{q} \cdots j_{s-2}}$$

es decir:

$$C_{ab}(A) = C\left(\uparrow^c_d (A)\right)$$
$$= C\left(C'(g^{-1} \otimes A)\right)$$

donde c, d son algunos índices y C, C' son contracciones.

Similarmente:

$$C^{ab} : \underset{\sim}{\mathcal{T}}^r_s(M) \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{T}}^{r-2}_s(M)$$

$$C^{ab}(A)^{i_1 \cdots i_{r-2}}_{j_1 \cdots j_s} = \sum_{p,q} g_{pq} A^{i_1 \cdots \overset{\swarrow a}{p} \cdots \overset{\swarrow b}{q} \cdots i_{r-2}}_{j_1 \cdots\cdots j_s}$$

Como antes:

$$C^{ab} = C\left(C'(g \otimes \cdot)\right)$$

C_{ab}, C^{ab} se llaman contracciones métricas.

Lema: En toda variedad pseudo-Riemanniana y para todo campo V, D_V conmuta con contracciones métricas y con $\uparrow$, $\downarrow$ ($\uparrow$ se llama subir índice (raising index)
$\downarrow$ se llama bajar índice (lowering index))

Dem.:

Sabemos que:

$$D_V\, C(A) = C(D_V A)$$

para toda contracción.

Además:

$$D_V(g \otimes A) = \cancelto{0}{(D_V g)} \otimes A + g \otimes D_V A$$

y: $D_V(g^{-1} \otimes A) = g^{-1} \otimes D_V A$

Luego se usa que:

$$\uparrow_a^b A = C(g^{-1} \otimes A)$$

$$\downarrow_b^a A = C'(g \otimes A)$$

$$C_{ab} A = C_1(C_2(g \otimes A))$$

$$C^{ab} A = C_1'(C_2'(g^{-1} \otimes A))$$

donde $C, C', C_1, C_2, C_1', C_2'$ son contracciones.

Obs.:

En álgebra lineal:

$$T : V \longrightarrow V$$

$$\therefore \quad T \longleftrightarrow A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

$$tr(T) = tr(A) \quad \checkmark$$

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad B \longleftrightarrow A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

$$tr(B) = tr(A) \quad \times$$

Campos de marcos.
(Frame fields)

M^n pseudo-Riemanniana

$E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$ se dicen un campo de marcos si

$$(E_1)_p, \dots, (E_n)_p$$

es base ortonormal de T_pM $\forall p \in M$.

También se puede considerar esto en un abierto.

En general, NO se tiene:

$$E_j = \partial_j$$

ni tampoco:

$$[E_j, E_h] = 0 \quad \forall j, h$$

Respecto de tales marcos:

$$V = \sum_m \varepsilon_m \langle V, E_m \rangle E_m$$

$$W = \sum_m \varepsilon_m \langle W, E_m \rangle E_m$$

donde $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle_p \quad \forall\, p$

$$\therefore \quad \langle V, W \rangle = \sum_m \varepsilon_m \langle V, E_m \rangle \langle W, E_m \rangle$$

En particular:

$$(C_{ab} A)(X_1, \ldots, X_{s-2}) =$$

$$= \sum_m \varepsilon_m A(X_1, \ldots, \underset{\overset{\uparrow}{a}}{E_m}, \ldots, \underset{\overset{\uparrow}{b}}{E_m}, \ldots, X_{s-2})$$

$$\forall\, A \in \mathcal{I}^r_s(M).$$

$$(C^1_b A)(X_1, \ldots, X_{s-1}) =$$

$$= \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, A(X_1, \ldots, \underset{\overset{\uparrow}{b}}{E_m}, \ldots, X_{s-1}) \rangle$$

$$\forall\, A \in \mathcal{I}^1_s(M).$$

Ejemplo:

$$R \in \mathcal{I}^1_3(M) \quad \therefore \quad C^1_b R \in \mathcal{I}^0_2(M)$$