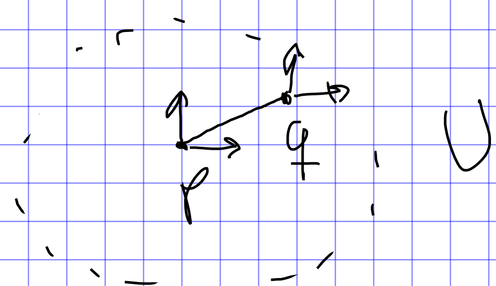
Proposición:

Si $U \subseteq M^n$ es vecindad normal de $p \in M$, entonces existe un campo de marcos $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$ que son paralelos a lo largo de toda geodésica que parte de p.

Dem.:

Se toma $e_1, \dots, e_n \in T_pM$ base ortonormal y se transporta paralelamente:



//

Operadores diferenciales.

M pseudo-Riemanniana.

*) Gradiente:

$\forall f \in C^{\infty}(M)$, el gradiente es el único campo $\operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ $\ni$:

$$\langle \operatorname{grad}(f), X \rangle = df(X) = X(f)$$

i.e. $(\operatorname{grad}(f))^{*} = df$

En coordenadas:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$\therefore \quad \operatorname{grad}(f) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

*) Divergencia.

Si A es tensor su divergencia se considera como una contracción de DA usando el argumento de D.

$$A \longleftrightarrow A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$$

$$DA \longleftrightarrow A^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s ; k}$$

Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$\operatorname{div}(V) = C^1_1(DV)$$

donde $DV \in \mathcal{T}^1_1(M)$

$$\therefore \quad \operatorname{div}(V)_p = \operatorname{tr}(u \longmapsto (D_u V)_p)$$

También:

$E_1, \ldots, E_n$ campo de marcos

$$\operatorname{div}(V) = \sum_m \varepsilon_m \langle D_{E_m} V, E_m \rangle$$

y en coordenadas:

$$\operatorname{div}(V) = \sum_{i=1}^{n} V^i_{;i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} \Gamma^i_{ij} V^j \right)$$

Si $A \in \mathcal{T}^0_2(M)$ simétrico, su divergencia es:

$$\operatorname{div}(A) = C_{13}(DA) = C_{23}(DA)$$

$$A \longleftrightarrow A_{ij}$$

$$DA \longleftrightarrow A_{ij;k}$$

$$\therefore \ (\operatorname{div}(A))_i = \sum_{r,s=1}^{n} g^{rs} A_{ri;s}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} A^r_{i;r}$$

Definición: El Hessiano de $f \in C^\infty(M)$ se define como:

$$Hf = H^f = D(Df) \in \mathcal{T}^0_2(M)$$

Calculamos:

$$(Df)(X) = D_X f = X(f) = df(X)$$

$$\therefore \ Df = df$$

$$Hf(X,Y) = (D(df))(X,Y)$$
$$= (D_Y(df))(X)$$
$$= D_Y(df(X)) - df(D_Y X)$$
$$= Y(X(f)) - df(D_Y X)$$
$$= Y(X(f)) - (D_Y X)(f) = \circledast$$

pero:

$$D_X Y - D_Y X = [X,Y]$$
$$= XY - YX$$
$$\therefore \quad YX - D_Y X = XY - D_X Y$$

Luego:

$$\circledast = X(Y(f)) - D_X Y(f)$$
$$= Hf(Y,X).$$

$\therefore \quad Hf \in \mathcal{I}^0_2(M)$ simétrico.

Además:

$$\langle D_X(\operatorname{grad} f), Y\rangle =$$

$$= X(\langle \operatorname{grad} f, Y\rangle) - \langle \operatorname{grad} f, D_X Y\rangle$$

$$= X(df(Y)) - df(D_X Y)$$

$$= X(Y(f)) - D_X Y(f)$$

$$= Hf(X,Y)$$

$$\therefore \quad Hf(X,Y) = \langle D_X(\operatorname{grad} f), Y\rangle$$

Definición:
Si $f \in C^\infty(M)$, su Laplaciano es:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

$$= C^1_1(D(\operatorname{grad} f))$$

$$= C^1_1(D\, \uparrow^1_1 df)$$

$$= C^1_1 \uparrow^1_1 D(df)$$

$$= C^1_1 \uparrow^1_1 Hf$$

$$= C_{12} Hf$$

En coordenadas:

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Hf)_{ij}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{h=1}^{n} \Gamma_{ij}^{h} \frac{\partial f}{\partial x^h}\right)$$

Curvaturas de Ricci y escalar.

Definición: La curvatura de Ricci de M es el tensor $Ric \in \mathcal{T}^0_2(M)$ dado por las componentes:

$$(Ric)_{ij} = R_{ij} = \sum_{m=1}^{n} R_{ijm}^{m}$$

$\therefore \quad Ric = C^1_3(R)$

Recordamos que:

$$R(X, Y, Z) = R_{YZ}X$$

En particular:

R_{ijh}^{ℓ} satisface

*) antisimétrico en jh

*) antisimétrico en $i\ell$

*) simétrico en (j,h) (i,ℓ)

Calculamos:

$$Ric(X,Y) = (C_3^1 R)(X,Y)$$

$$= \sum_m \varepsilon_m \langle R(X,Y,E_m), E_m \rangle$$

$$= \sum_m \varepsilon_m \langle R_{YE_m} X, E_m \rangle \quad \checkmark$$

$$= \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m} Y, E_m \rangle$$

$$= Ric(Y,X)$$

Además:

$$Ric(X,Y) = tr(V \longmapsto R_{XV} Y)$$

Sea $u \in T_pM$ unitario y $e_1 = u, e_2, \dots, e_n$ base ortonormal.

Entonces:

$$Ric(u,u) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \langle R_{u e_j} u, e_j \rangle$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j \langle R_{u e_j} u, e_j \rangle$$

$$\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle, \quad Q(u, e_j) = \varepsilon_j \langle u, u \rangle$$

$$\therefore \quad Ric(u,u) = \langle u, u \rangle \sum_{j=2}^{n} K(u, e_j)$$

Definición:

La curvatura escalar es:

$$S = C_{12}(Ric) \in C^\infty(M).$$

$$\therefore \quad S = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij} R_{ijk}^{k}$$

Usando campos de marcos:

$$S = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j) = 2 \sum_{i<j} K(E_i, E_j)$$

Corolario:

$$dS = 2\,\mathrm{div}(Ric)$$

(Por esta razón en física se usa:

$$Sg - 2Ric = T$$)