Si $\varphi: M \longrightarrow N$ es isometría, entonces $\forall p \in M$:

$$(*)\quad \begin{tikzcd} \mathcal{U}_0 \subseteq T_pM \arrow[r, "d\varphi_p"] \arrow[d, "\exp_p"'] & \mathcal{V}_0 \subseteq T_{\varphi(p)}N \arrow[d, "\exp_{\varphi(p)}"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir:

$$\varphi(\exp_p(tv)) = \varphi(\gamma_v(t))$$
$$= \gamma_{d\varphi_p(v)}(t) = \exp_{\varphi(p)}(t\, d\varphi_p(v))$$

Proposición:
Si $\varphi, \psi: M \longrightarrow N$ son isometrías, M, N conexas y $\exists\, p_0 \in M \ni d\varphi_{p_0} = d\psi_{p_0}$
$\Longrightarrow \varphi \equiv \psi$.

esto implica $\varphi(p_0) = \psi(p_0)$

Dem.:
Sea $A = \{p \in M \mid d\varphi_p = d\psi_p\}$

$\therefore$ $A \neq \emptyset$, A cerrado.

Por ⊗ si $d\varphi_p = d\psi_p$ entonces

$$\varphi(q) = \psi(q) \quad \forall q \in \underbrace{\exp_p(\mathcal{U}_0)}_{\text{vecindad de } p}$$

$\Rightarrow$ $d\varphi_q = d\psi_q$ q en una vec. de p.

$\Rightarrow$ A abierto

$\Rightarrow$ $A = M$.

Cap. 4

Subvariedade pseudo-Riemannianas.

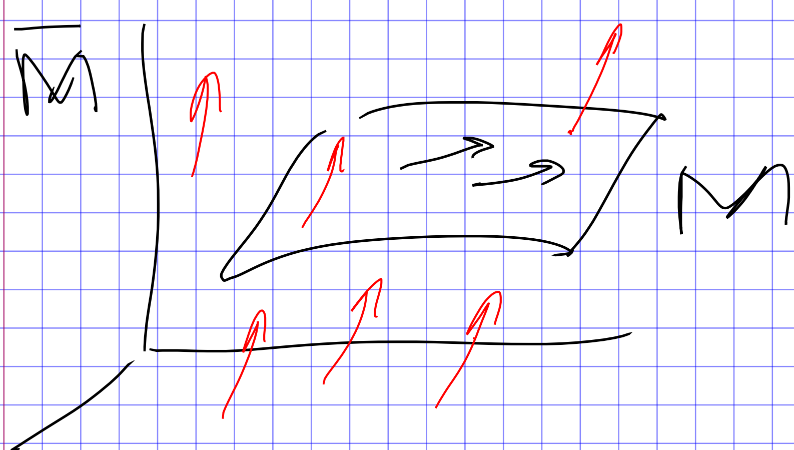
En todo el capítulo:

$\overline{M}$ variedad pseudo-Riemanniana.

$M \subseteq \overline{M}$ subvariedad pseudo-Riemanniana.

En particular, tenemos:

$\mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}(\overline{M})$



Definición: $M \subseteq \overline{M}$

Los campos tangentes a $\overline{M}$ a lo largo de M son

Funciones suaves:

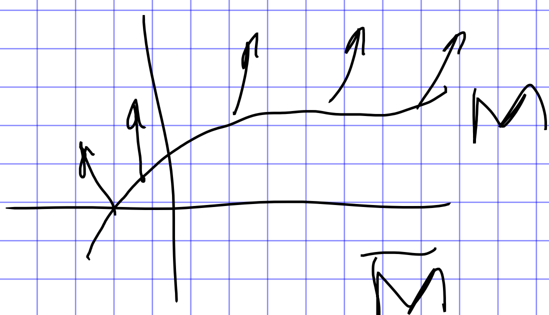
$$X : M \longrightarrow T\overline{M}$$

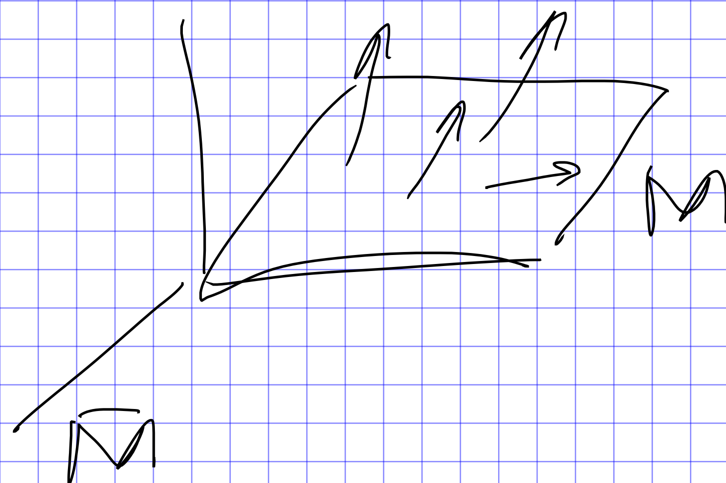
$\ni \quad X_p \in T_p\overline{M} \quad \forall p \in M.$

El espacio de tales campos se denota:

$$\mathfrak{X}(M)$$

y es $C^\infty(M)$-módulo.





Como M es subvariedad pseudo-Riemanniana, $\forall p \in M$ tenemos:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$$

$$x = \tan(x) + \operatorname{nor}(x)$$

$$= x^T + x^\perp$$

Denotamos:

$$\mathfrak{X}(M)^{\perp} = \{ X \in \overline{\mathfrak{X}}(M) \mid X_p \in T_pM^{\perp} \ \forall p \in M \}$$

y tenemos las proyecciones naturales:

$$tan : \overline{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$nor : \overline{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

Conexión inducida.

$\overline{M}, \overline{D}$, M, D

$$\overline{D} \overset{?}{\longleftrightarrow} D$$

Definición:

La conexión inducida en M es:

$$\overline{D} : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M)$$

$$\overline{D}_V X$$

definida como sigue.

Dados $V \in \mathfrak{X}(M)$, $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$

y $p\in M$, en una vecindad $\mathcal{U}$ de p en $\overline{M}$ extendemos V, X a $\overline{V}, \overline{X}$ i.e.:

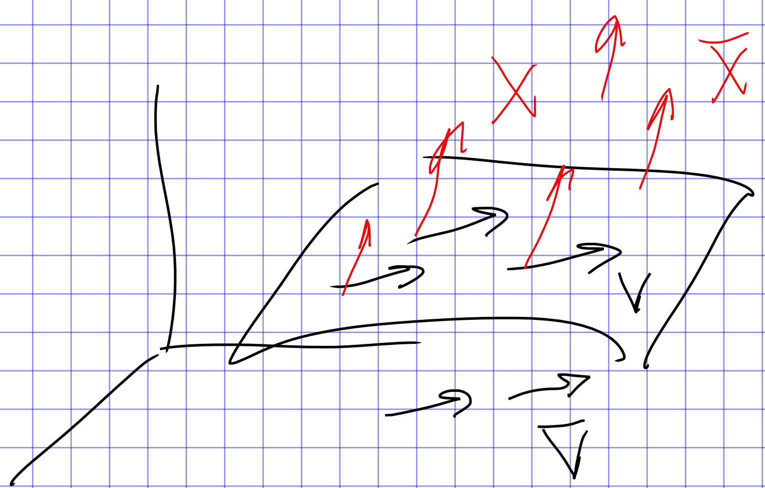
$$\overline{V}\big|_{\mathcal{U}\cap M} = V\big|_{\mathcal{U}\cap M}$$

$$\overline{X}\big|_{\mathcal{U}\cap M} = X\big|_{\mathcal{U}\cap M}$$

y definimos en $\mathcal{U}\cap M$:

$$\overline{D}_V X = \overline{D}_{\overline{V}}\, \overline{X}$$

Levi-Civita de $\overline{M}$



Lema: $\overline{D}_V X$ no depende de las extensiones $\overline{V}, \overline{X}$.

Dem.:
Escogemos $\mathcal{U}$ con coordenadas $(x^1, \dots, x^4)$ adaptadas a M.

Escribimos:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \partial_{x^i}$$

$$\therefore \quad \underbrace{\overline{D}_{\overline{V}} \overline{X}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{V}(f_i) \partial_{x^i} + f_i \overline{D}_{\overline{V}} \partial_{x^i} \right)$$

y en $\mathcal{U} \cap M$:

componentes de X

$$\overline{D}_{\overline{V}} \overline{X} \Big|_{\mathcal{U} \cap M} = \sum_{i=1}^{n} \Big(V(f_i)\big|_{\mathcal{U}\cap M} \partial_{x^i}$$

$$+ f_i\big|_{\mathcal{U}\cap M} \left(\overline{D}_V \partial_{x^i}\right)\Big|_{\mathcal{U}\cap M} \Big)$$

componentes de X

que depende solo de V y X.

//

Obs.:

Si $\dim M = 1$, entonces M es imagen de una curva $\alpha : I \to \overline{M}$ y se puede ver que:

$$\frac{D}{dt} = \overline{D}_{\alpha'}$$

Corolario:

$\bar{D} : \mathfrak{X}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)$

satisface:

$$V, W \in \mathfrak{X}(M) \;, \; X, Y \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$$

(1) $\bar{D}_V X$ es $C^\infty(M)$-lineal en V

(2) $\bar{D}_V X$ es $\mathbb{R}$-lineal en X

(3) $\bar{D}_V(fX) = V(f)X + f\bar{D}_V X$
$\forall f \in C^\infty(M)$

(4) $\bar{D}_V W - \bar{D}_W V = [V, W]$

(5) $V(\langle X, Y\rangle) = \langle \bar{D}_V X, Y\rangle + \langle X, \bar{D}_V Y\rangle$

Lema: $\bar{M}, \bar{D}, M, D$ y

$\bar{D} : \mathfrak{X}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)$.

Entonces $\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$:

$$D_V W = \tan(\bar{D}_V W)$$

$$\left(= \tan(\bar{D}_{\bar{V}} \bar{W})\big|_M \right)$$

Dem.:

Recordamos Koszul:

$$2\langle D_V W, X\rangle = F(V, W, X)$$

$$= V\langle W, X\rangle + W\langle V, X\rangle - X\langle V, W\rangle$$

$$-\langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle$$

Observamos que:

$$\bar{V}\langle \bar{W}, \bar{X}\rangle\big|_M = V\langle W, X\rangle$$

$$\langle \bar{V}, [\bar{W}, \bar{X}]\rangle\big|_M = \langle V, [W, X]\rangle$$

Por tanto:

$$F(\bar{V}, \bar{W}, \bar{X})\big|_M = F(V, W, X)$$

Por otro lado:

$$\langle \bar{D}_{\bar{V}} \bar{W}, \bar{X}\rangle\big|_M =$$

$$= \langle \bar{D}_V W, X\rangle$$

$= \langle \tan(\bar{D}_V W), X \rangle$

Luego tenemos:

$$2\langle D_V W, X \rangle = F(V, W, X)$$
$$= F(\bar{V}, \bar{W}, \bar{X})\big|_M = 2\langle \bar{D}_{\bar{V}} \bar{W}, \bar{X} \rangle\big|_M$$
$$= 2\langle \tan(\bar{D}_V W), X \rangle$$

$$\Rightarrow \quad D_V W = \tan(\bar{D}_V W) \quad //$$

Lema: La función (tensor?)

$$\mathrm{II} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

$$\mathrm{II}(V, W) = \mathrm{nor}(\bar{D}_V W)$$

es $C^\infty(M)$-bilineal simétrica, que es llamado el tensor de forma (shape tensor) ó segunda forma fundamental de M en $\bar{M}$.

Dem:

$$\bar{D}_V (f W) = V(f) W + f \bar{D}_V W$$

$$\mathrm{nor}(\bar{D}_V(fW)) = \mathrm{nor}(V(f)W)^{\to 0} + f\,\mathrm{nor}(\bar{D}_V W)$$

$$\mathrm{nor}(\bar{D}_V W - \bar{D}_W V) = \mathrm{nor}([V,W]) = 0 \,.$$ //

Ecuación importante:

$$\underbrace{\bar{D}_V W}_{\text{conexión inducida}} = \underbrace{\overset{\text{L.-C.}}{D_V W}}_{\tan} + \underbrace{\overset{\text{2da. fund.}}{\mathrm{II}(V,W)}}_{\mathrm{nor}}$$

$\forall\, V, W \in \mathfrak{X}(M)$

Teorema: M, D, R, $\bar{M}, \bar{D}, \bar{R}$

Entonces $\forall\, V, W, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\langle R_{VW}X, Y\rangle = \langle \bar{R}_{VW}X, Y\rangle + \langle \mathrm{II}(V,X), \mathrm{II}(W,Y)\rangle - \langle \mathrm{II}(V,Y), \mathrm{II}(W,X)\rangle$$

Corolario: M, K, $\bar{M}, \bar{K}$

$$K(v,w) = \bar{K}(v,w) + \frac{\langle II(v,v), II(w,w)\rangle - \langle II(v,w), II(v,w)\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$