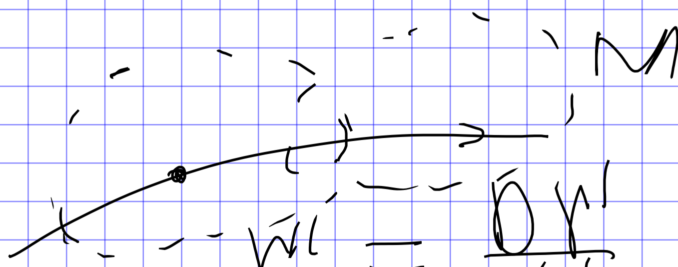
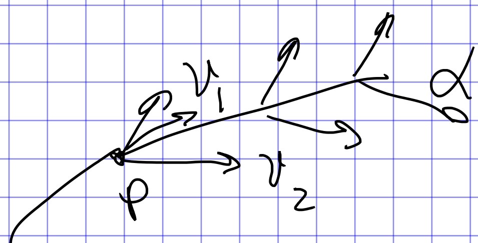
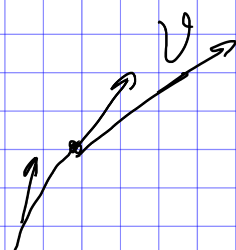
Si $v \in T_pM$, entonces:

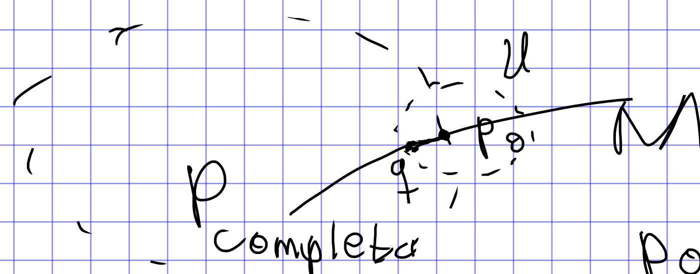
$$\gamma_v(ct) = \gamma_{cv}(t)$$



$$\gamma'' = \frac{D\gamma'}{dt} = 0, \quad \gamma : I \to M$$







$p_0 \in \partial P$

$\Longrightarrow \quad p_0 \in P$

$\Longrightarrow \; \Longleftarrow$

Ejemplo:

Sea $S^n(r) = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r \}$ con $S^n(r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ambas Riemannianas.

Veremos que $K = \frac{1}{r^2}$ para $S^n(r)$.

Sea $P = \sum_{i=1}^{n+1} u^i \underset{(e_i)}{\partial_{u^i}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$

el campo vectorial de posición, de hecho:

$$P_x = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Para $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\bar{D}_X Y = \sum_{i=1}^{n+1} X(Y^i) \partial_{u^i}$$

Luego:

$$\bar{D}_X P = \sum_{i=1}^{n+1} \underbrace{X(u^i)}_{\text{comp. de } X} \partial_{u^i} = X$$

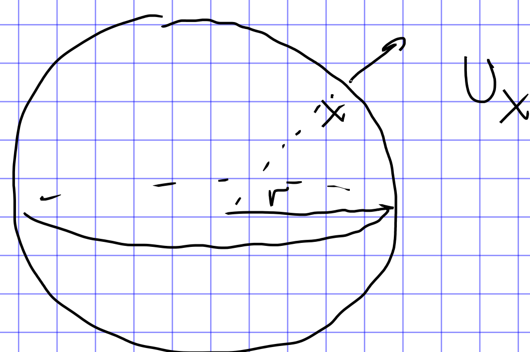
Sea $U = \frac{1}{r} P|_{S^n(r)} \in \mathfrak{X}(S^n(r))^{\perp}$

pues:

$$T_x S^n(r) = (\mathbb{R}x)^\perp$$
$$= (\mathbb{R}P_x)^\perp$$

Vemos que: $x \in S^n(r)$

$$\langle U_x, U_x \rangle = \frac{1}{r^2}\langle P_x, P_x \rangle = \frac{1}{r^2}\langle x, x \rangle$$
$$= 1.$$



Se calcula II: $(V, W \in \mathfrak{X}(S^n(r)))$

$$\mathrm{II}(V, W) \in \mathfrak{X}(S^n(r))^\perp$$

$\therefore \ \exists \ f(V, W) \in \mathbb{R} \ \ni$:

$$\mathrm{II}(V, W) = f(V, W)\, U$$

$$f(V, W) = ?$$

De hecho:

$$f(v,w) = \langle \mathrm{II}(v,w), U \rangle$$

$$= \langle \mathrm{nor}(\overline{D}_v W), U \rangle$$

$$= \langle \overline{D}_v W, U \rangle$$

$$= v(\underbrace{\langle W, U \rangle}_{=0}) - \langle W, \overline{D}_v U \rangle$$

$$= -\langle W, \overline{D}_v U \rangle$$

$$= -\frac{1}{r} \langle W, \overline{D}_v P \rangle$$

$$= -\frac{1}{r} \langle v, w \rangle$$

$$\therefore \mathrm{II}(v,w) = -\frac{1}{r} \langle v, w \rangle U$$

Como $\overline{K} \equiv 0$ para $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$K(v,w) = \quad (\text{para } S^n(r))$$

$$= \frac{\langle \mathrm{II}(v,v), \mathrm{II}(w,w) \rangle - \langle \mathrm{II}(v,w), \mathrm{II}(v,w) \rangle}{\langle v,v \rangle \langle w,w \rangle - \langle v,w \rangle^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}.$$

Curvatura media:
(mean curvature)

$$M^n \subseteq \overline{M}$$

$\forall p \in M$ se define por:

$$H_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathrm{II}_p(e_i, e_i)$$

donde $e_1, \dots, e_n$ es marco ortonormal de T_pM.

De hecho:

$$H = \frac{1}{n} C_{12}(\mathrm{II})$$

Geometría intrínseca de M es dada por todas las propiedades preservadas por isometrías.

Geometría extrínseca de $M \subseteq \overline{M}$ es la dada por las propiedades preservadas por congruencias o isometrías de pares, definidas como sigue:

Sean $M \subseteq \overline{M}$, $N \subseteq \overline{N}$ variedades pseudo-Riemannianas M, N con subvariedades pseudo-Riemannianas M, N. Una congruencia o isometría de pares es una isometría $\varphi : \overline{M} \longrightarrow \overline{N}$ tal que:

$$\varphi(M) = N.$$

Ejemplo:

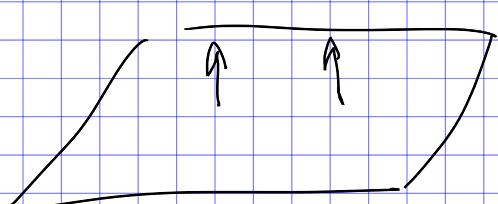
$$\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{R} \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times S^1$ son localmente isométricos vía:

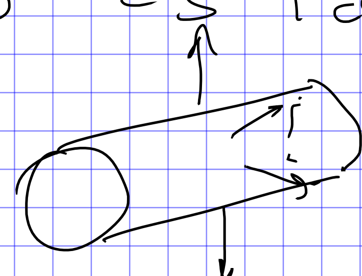
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times S^1$$

$$(x, y) \longmapsto (x, \cos y, \sin y)$$

pero no son congruentes en $\mathbb{R}^3$, pues II no es la misma:



$\mathrm{II} \equiv 0$



$\mathrm{II} \neq 0$

Lema: Si φ es una isometría entre los pares $M \subseteq \overline{M}$, $N \subseteq \overline{N}$, entonces:

$$d\varphi(\overset{M}{\mathrm{II}}(v,w)) = \overset{N}{\mathrm{II}}(d\varphi(v), d\varphi(w))$$

$\forall v, w \in T_pM$, $p \in M$.

Dem.: $V, W \in \mathfrak{X}(M)$

$$d\varphi(\mathrm{II}(V,W)) = d\varphi(\mathrm{nor}(\overline{D}_V W))$$

$$= \mathrm{nor}(d\varphi(\overline{D}_V W))$$

$d\varphi$ preserva:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

$p \in M$

$$\downarrow$$

$$T_{\varphi(p)}\overline{N} = T_{\varphi(p)}N \oplus T_{\varphi(p)}N^{\perp}$$

$$= \mathrm{nor}(\overline{D}_{d\varphi(V)} d\varphi(W))$$

$$= \mathrm{II}(d\varphi(V), d\varphi(W))$$

//

Geodésicas en subvariedades.

$M \subseteq \bar{M}$ subvariedad pseudo-Riemanniana.

$\alpha : I \longrightarrow M \subseteq \bar{M}$ curva suave

$Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$, $Y_t \in T_{\alpha(t)} M \quad \forall t \in I$

Notación: $\alpha' = \dot{\alpha}$

en M en $\bar{M}$

$$\dot{Y} = \frac{\bar{D} Y}{dt} \quad \text{en } \bar{M}$$

$$Y' = \frac{DY}{dt} \quad \text{en } M$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{\bar{D}\dot{\alpha}}{dt} \quad \text{en } \bar{M}$$

$$\alpha'' = \frac{D\alpha'}{dt} \quad \text{en } M.$$

Recordamos que $\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$

$$\bar{D}_V W = D_V W + \mathrm{II}(V, W)$$

Similarmente:

Proposición:
Con la notación anterior:

$$\underset{\text{en } \bar{M}}{\mathring{Y}} = \underset{\text{en } M}{Y'} + \underset{TM^{\perp}}{\mathrm{II}(\alpha', Y)}$$

Dem.:
Localmente escribimos:

$$Y = \sum_i Y^i \partial_i$$

$$\therefore \mathring{Y} = \underbrace{\sum_i \frac{dY^i}{dt}\partial_i}_{\text{en } TM} + \underbrace{\sum_i Y^i \bar{D}_{\alpha'}(\partial_i)}_{\text{en } T\bar{M}}$$

pero:

$$\bar{D}_{\alpha'}\partial_i = D_{\alpha'}\partial_i + \mathrm{II}(\alpha', \partial_i)$$

$$\therefore \mathring{Y} = \underbrace{\sum_i \frac{dY^i}{dt}\partial_i + \sum_i Y_i D_{\alpha'}\partial_i}_{Y'}$$

$$+ \underbrace{\sum_i Y^i \mathrm{II}(\alpha', \partial_i)}_{\mathrm{II}(\alpha', Y)} \quad //$$

Con $Y = \alpha'$:

Corolario: $\forall \alpha : I \longrightarrow M \subseteq \bar{M}$ tenemos:

$$\ddot{\alpha} = \alpha'' + \mathrm{II}(\alpha', \alpha')$$

Obs.:

α geodésica en $\bar{M}$ $\iff \ddot{\alpha} = 0$

α geodésica en M $\iff \alpha'' = 0$

Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ geodésica en M: $\alpha'' = 0$.

$\therefore$ α se ve "recta" en M.

pero en $\bar{M}$:

$$\ddot{\alpha} = \mathrm{II}(\alpha', \alpha')$$

y α no se ve "recta" en $\bar{M}$, sino con aceleración dada por $\mathrm{II}(\alpha', \alpha')$.

Corolario:

Sea $\alpha : I \longrightarrow M \subseteq \bar{M}$

α es geodésica en M

$\iff$ $\ddot{\alpha}$ es normal a M.

Dem.:

$$\ddot{\alpha} = \underbrace{\alpha''}_{\substack{\text{tan} \\ \text{a } M}} + \underbrace{\mathrm{II}(\alpha', \alpha')}_{\substack{\text{nor} \\ \text{a } M}}$$

$\ddot{\alpha}$ es normal a M

$\iff$ $\ddot{\alpha}$ no tiene componente tangente a M.

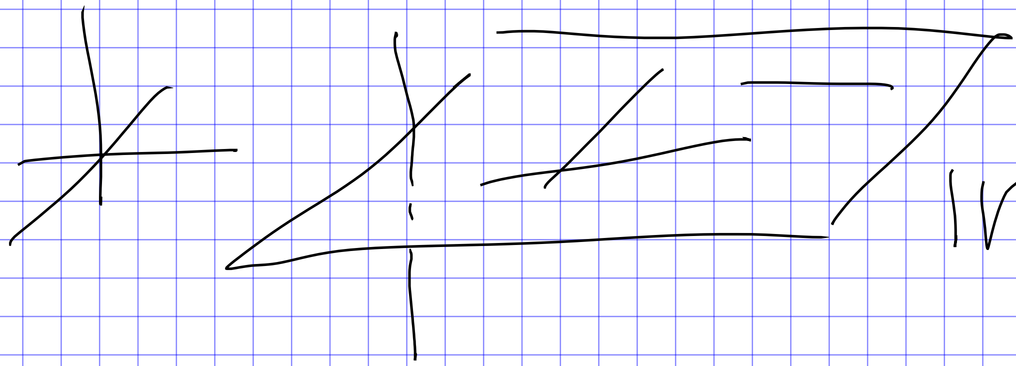
$\iff$ $\alpha'' \equiv 0$ //

Corolario: $M \subseteq \bar{M}$

Si $\mathrm{II} \equiv 0$, entonces:

$$\ddot{\alpha} = \alpha'' \quad \forall \alpha : I \longrightarrow M.$$

En particular, toda geodésica de M lo es de $\bar{M}$.



$\mathbb{R}^3$