Recordamos:

$$\overline{M} \supseteq M$$

$$\dot{Y} = Y' + \mathrm{II}(\alpha', Y)$$

$$\ddot{\alpha} = \alpha'' + \mathrm{II}(\alpha', \alpha')$$

$\alpha : I \longrightarrow M$ es geodésica en $M \iff \ddot{\alpha}(t) \perp T_{\alpha(t)} M$ $\forall t \in M$.

Ejemplo:

Consideramos $S^n(r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$
$(\|x\| = r)$

$p_0 \in S^n(r)$, $v \in T_{p_0} S^n(r)$, $\|v\| = 1$.

Sabemos que:

$$T_{p_0} S^n(r) = (\mathbb{R} p_0)^{\perp}$$

Sea:

$$\alpha_v : \mathbb{R} \longrightarrow S^n(r)$$

$$\alpha_v(t) = r\left(\cos\left(\frac{t}{r}\right) \frac{p_0}{r} + \sin\left(\frac{t}{r}\right) v\right)$$

$\left\{\frac{p_0}{r}, v\right\}$ es ortonormal

$\cos\left(\frac{t}{r}\right)\frac{p_0}{r} + \sin\left(\frac{t}{r}\right)v$ es un círculo de radio 1

$\alpha_v(t)$ es un círculo de radio r.

Entonces:

$$\dot{\alpha}_v(t) = r\left(-\frac{1}{r}\sin\left(\frac{t}{r}\right)\frac{p_0}{r} + \frac{1}{r}\cos\left(\frac{t}{r}\right)v\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{t}{r}\right)\frac{p_0}{r} + \cos\left(\frac{t}{r}\right)v$$

$\therefore\ \dot{\alpha}_v(0) = v$

$$\ddot{\alpha}_v(t) = -\cos\left(\frac{t}{r}\right)\frac{p_0}{r^2} - \sin\left(\frac{t}{r}\right)\frac{v}{r}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\alpha_v(t)$$

$\therefore\ \ddot{\alpha}_v(t) \in \mathbb{R}\alpha_v(t) = \left(T_{\alpha_v(t)}S^n(r)\right)^\perp$

$\therefore\ \alpha_v$ es geodésica con $\alpha_v'(0) = v$.

Luego el mapeo exponencial de $S^n(r)$ es:

$$\exp_{p_0} : T_{p_0} S^n(r) \longrightarrow S^n(r)$$

$$\exp_{p_0}(tv) = r\left(\cos\left(\frac{t}{r}\right)\frac{p_0}{r} + \sin\left(\frac{t}{r}\right)v\right)$$

$$\|v\| = 1.$$

En particular, toda geodésica en $S^n(r)$ tiene imagen de la forma:

$$S^n(r) \cap \Pi$$

donde $\Pi \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es subespacio 2-dimensional.

Subvariedades totalmente geodésicas.

Definición:

$M \subseteq \overline{M}$ subvariedad pseudo-Riemanniana se dice totalmente geodésica si:

$$\mathrm{II} = 0.$$

Proposición:
Si $M \subseteq \overline{M}$ entonces son equivalentes:

(1) M totalmente geodésica en $\overline{M}$

(2) Toda geodésica de M lo es en $\overline{M}$.

(3) Si $v \in T_pM$, entonces la geodésica γ_v de $\overline{M}$ esta inicialmente en M ($\gamma_v((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq M$ algún $\varepsilon > 0$)

(4) Si $\alpha: I \longrightarrow M$ es curva suave $v \in T_{\alpha(0)}M$, entonces el transporte paralelo de v en M y en $\overline{M}$ son el mismo.

Dem.:

(2) $\Rightarrow$ (3):

Dado $v \in T_pM$, sea α la geodésica en M con $\alpha'(0) = v$. (2) dice que α es geodésica en $\overline{M}$

$\therefore$ $\alpha|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} = \gamma_v|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$

$\therefore \quad \gamma_v((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq M$

$(3) \Rightarrow (1)$

Sea $v \in T_p M$, γ_v la geodésica correspondiente en $\overline{M}$.
(3) nos dice que $\gamma_v \subseteq M$ inicialmente. Tenemos:

$$0 = \ddot{\gamma}_v = \underbrace{\gamma_v''}_{\text{tan}} + \underbrace{\mathrm{II}(\gamma_v', \gamma_v')}_{\text{nor.}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{II}(\gamma_v', \gamma_v') = 0$$
$$\therefore \quad \mathrm{II}(v, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{II} = 0.$$

$(1) \Rightarrow (4)$

Sea $\alpha : I \longrightarrow M \subseteq \overline{M}$
$V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tangente a M.
El transporte se da:

en M cuando $V' = 0$
en $\overline{M}$ cuando $\dot{V} = 0$

pero:

$$\dot{V} = V' + \overbrace{\mathrm{II}(\alpha', V)}^{=0 \text{ por } (1)} = V'$$

$(4) \Rightarrow (2)$:

$\gamma : I \longrightarrow M$ es geodésica:

en M si γ' es paralelo en M

en $\bar{M}$ si γ' es paralelo en $\bar{M}$

Pero (4) dice que transporte paralelo en M y en $\bar{M}$ es el mismo.

//

Ejemplos:

En $\mathbb{R}^n_\nu$ todos los subespacios afines no-degenerados son totalmente geodésicos.

En $S^n(r)$ las esferas:

$$S^n(r) \cap V$$

($V \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacio) son totalmente geodésicas.

Lema:
Sean $M, N \subseteq \overline{M}$ subvariedades pseudo-Riemannianas conexas completas y totalmente geodésicas.
Si $\exists\ p \in M \cap N$ tal que $T_pM = T_pN \Rightarrow M = N$.

Dem.:

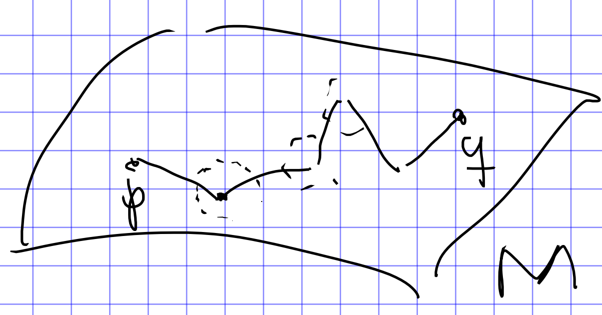
$M \subseteq N$ localmente:

$p \in M \cap N$, $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$ geodésica en M con $\sigma(0) = p$, $\sigma(1) = q$.

$\therefore\ \sigma'(0) \in T_pM = T_pN$.

σ geod. en $M \Rightarrow \sigma$ geod. en $\overline{M} \Rightarrow \sigma$ geod. en N.

$\therefore\ q \in N$



$\therefore\ q \in N$ //

Definición:
$M \subseteq \overline{M}$.

(1) $p \in M$ se dice punto umbílico (umbilic point) si $\exists\, z \in T_pM^{\perp}$ $\ni$:

$$\mathrm{II}(v,w) = \langle v, w \rangle z$$

y z es llamado el vector de curvatura normal de M en p.

$$\left(\mathrm{II}\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) = z \right)$$

(2) M se dice totalmente umbílica si es umbílica en todo punto:

$$\mathrm{II}(V,W) = \langle V, W \rangle Z$$

para un $Z \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$

Ejemplos:
Totalmente geodésica ($\mathrm{II} = 0$)
$\Rightarrow$ totalmente umbílica
(con $Z = 0$)

Para $S^n(r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ probamos que:

$$\mathrm{II}(v,w) = -\langle v,w\rangle \frac{U}{r}$$

Hipersuperficies pseudo-Riemannianas.

Sea $M \subseteq \bar{M}$ hipersuperficie p.R. en toda esta sección.

i.e. $\dim M = \dim \bar{M} - 1$.

índice de M, $g \sim \begin{pmatrix} I_* & 0 \\ 0 & -I_\nu \end{pmatrix}$

$= \nu$

índice de $\bar{M}$, $\bar{g} \sim \begin{pmatrix} I_* & 0 \\ 0 & -I_{\bar{\nu}} \end{pmatrix}$

$= \bar{\nu}$

co-índice de M en $\bar{M}$

$=$ índice de $T_pM^\perp \leftarrow \dim = 1$

$= 0, 1$

Definición:

El signo $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ de M en $\bar{M}$ es:

$+1$ si co-índice de M es 0
si $\langle z, z\rangle \geq 0 \quad \forall z \in TM^{\perp}$

-1 si co-índice de M es 1
si $\langle z, z\rangle \leq 0 \quad \forall z \in TM^{\perp}$

Sea $\overline{M}$ dada y $f \in C^{\infty}(\overline{M})$.
Sea $c \in \mathbb{R}$ valor regular de f.

$\therefore \quad M = f^{-1}(c)$ es subvariedad de $\overline{M}$

c valor regular:

$$df_p \neq 0 \quad \forall p \in M$$

$$\operatorname{grad} f_p \neq 0 \quad \forall p \in M.$$

Además:

$$T_pM = (\mathbb{R} \operatorname{grad} f_p)^{\perp}$$

T_pM es nodegenerado

$\iff \mathbb{R} \operatorname{grad} f_p$ es no-deg.

$\iff \langle \operatorname{grad} f_p, \operatorname{grad} f_p \rangle \neq 0.$

1. M es hipersuperficie p.R.

$\iff$ $\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle \in C^\infty(M)$ nunca se anula. y no cambia de signo.

Y en este caso:

$$\varepsilon = \text{sgn}(\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle)$$

Además:

$$U = \frac{\text{grad} f}{\sqrt{|\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle|}}$$

es campo normal unitario.

En lo sucesivo considera-mos:

$M = f^{-1}(c)$, c valor regular

$\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle > 0$ ó < 0

$\varepsilon = \text{sgn}(\langle \text{grad}, \text{grad} f \rangle)$

y U como arriba.