$M \subseteq \overline{M}$ hipersuperficie p-R.

$\therefore \forall p \in M \quad \dim T_pM^\perp = 1$

$\therefore$ si $u_p \in T_pM^\perp \setminus \{0\}$ entonces:

$$\mathrm{II}_p(v, w) \in \mathbb{R} u_p$$

$\forall v, w \in T_pM$.

Definición: $M \subseteq \overline{M}$ hipersuperficie con $U \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ unitario. El tensor S de tipo $(1,1)$ sobre M dado por:

$$\langle S(V), W \rangle = \langle \mathrm{II}(V, W), U \rangle$$

$\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$, se llama el operador de forma.

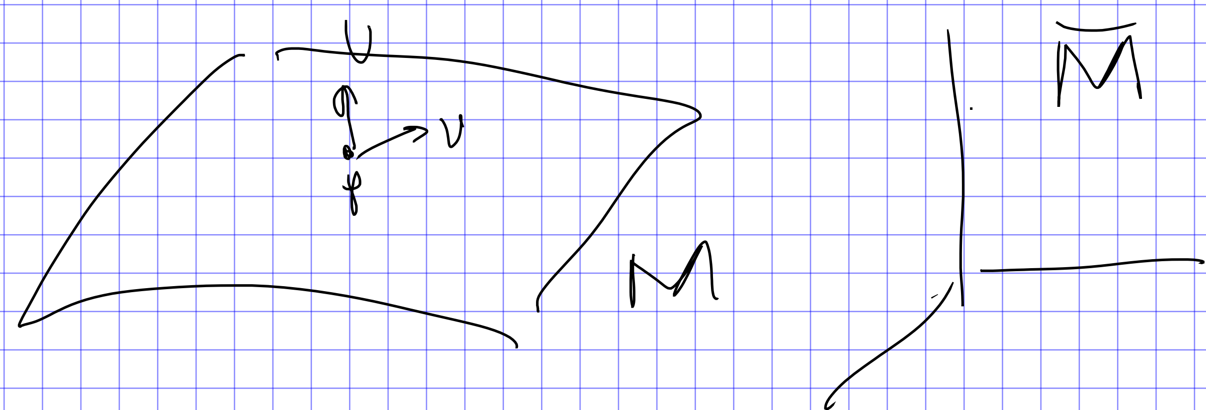
$\therefore \quad S : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$

Con esta notación:

$$\langle S(V), W \rangle = \langle \mathrm{II}(V, W), U \rangle$$
$$= \langle \mathrm{nor}(\overline{D}_V W), U \rangle$$
$$= \langle \overline{D}_V W, U \rangle$$
$$= V(\overbrace{\langle W, U \rangle}^{=0}) - \langle W, \overline{D}_V U \rangle$$

$$= \langle -\overline{D}_v U, w \rangle$$

$$\therefore \quad S_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$
$$S_p(v) = -\overline{D}_v U$$



Observamos que:

$$\langle U, U \rangle = \pm 1$$

$$\therefore \quad 0 = v(\langle U, U \rangle) = 2\langle \overline{D}_v U, U \rangle$$
$$\therefore \quad \overline{D}_v U \in T_pM$$

$\forall p \in M,\ v \in T_pM.$

Corolario: Con la notación anterior $(M \subseteq \overline{M}, S)$

$\forall p \in M,\ v, w \in T_pM$

$$K(v,w) = \overline{K}(v,w) + \varepsilon \frac{\langle Sv, v \rangle \langle Sw, w \rangle - \langle Sv, w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

Lema:
$M \subseteq \overline{M}$ es hipersuperficie totalmente umbílica
$\iff$ el operador de forma S es escalar:

$$\exists\ k_U : M \longrightarrow \mathbb{R} \ni:$$
$$S(V) = k_U V.$$

Observación: Si $M \subseteq \overline{M}$ es hipersuperficie U siempre existe localmente.

Hipercuádricas.

$\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ $(0 \leq \nu \leq n+1)$ tiene la métrica p.R. dada por:

$$\langle v, v \rangle_\nu = -\sum_{i=1}^{\nu} v_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} v_i^2$$

la conexión de Levi-Civita es: $\overline{D}_V W = V(W)$
y no depende de ν.

Se definen:

$$q : \mathbb{R}^{n+1}_{\nu} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$q(v) = \langle v, v \rangle_{\nu}$$

$$P \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1}_{\nu})$$

$$P_v = v$$

$$\therefore \quad q = \langle P, P \rangle$$

Calculamos:

$$dq = -\sum_{i=1}^{\nu} 2u^i du^i + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} 2u^i du^i$$

pues:

$$q = -\sum_{i=1}^{\nu} (u^i)^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} (u^i)^2$$

$$\therefore \; dq(V) =$$

$$= 2\left(-\sum_{i=1}^{\nu} u^i V^i + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} u^i V^i\right)$$

$$= 2\langle P, V \rangle_{\nu}$$

$$\therefore \quad \operatorname{grad} q = 2P$$

$\langle \operatorname{grad} q, \operatorname{grad} q \rangle_\nu = 4 \langle p, p \rangle_\nu$

que puede se > 0, $= 0$, < 0 dependiendo del punto.

Consideramos para $r > 0$ y $\varepsilon = \pm 1$:

$$Q = q^{-1}(\varepsilon r^2)$$
$$= \{ p \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu \mid \langle p, p \rangle_\nu = \varepsilon r^2 \}$$

y se llaman hipercuádricas centrales.

Q es hipersuperficie p.R.:

$v \in Q = q^{-1}(\varepsilon r^2)$

$$\langle \operatorname{grad} q_v, \operatorname{grad} q_v \rangle_\nu = 2 \langle P_v, P_v \rangle$$
$$= 2 \langle v, v \rangle_\nu = 2 \varepsilon r^2$$

y Q tiene signo ε.

Además: $\forall v \in Q$:

$$T_v Q = \operatorname{Ker}(d q_v)$$
$$= \operatorname{Ker}(\langle \operatorname{grad} q_v, \ \rangle_\nu)$$

$= \ker(\langle p_\nu, \ \rangle_\nu)$

$= \ker(\langle v, \ \rangle_\nu)$

$= (\mathbb{R}v)^{\perp_\nu} \longleftarrow$ en $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$

Proposición: (caso $\varepsilon = 0$)

$\Lambda = q^{-1}(0) \setminus \{0\}$ es hipersuperficie difeomorfa a

$$(\mathbb{R}^\nu \setminus \{0\}) \times S^{n-\nu}$$

pero no es p.R., pues p es tangente y normal a Λ.

Definición:

Con $n \geq 2$ y $0 \leq \nu \leq n$ definimos:

(1) La pseudoesfera de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ es:

$$S^n_\nu(r) = q^{-1}(r^2) = \{p \mid \langle p, p \rangle_\nu = r^2\}$$

(2) El espacio pseudohiperbólico de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1}$ es:

$$H^n_\nu(r) = q^{-1}(-r^2) = \{p \mid \langle p, p \rangle_{\nu+1} = -r^2\}$$

$S^n_\nu(r)$, $H^n_\nu(r)$ tienen dimensión n, índice ν y signos:

$$S^n_\nu(r) \longrightarrow 1, \quad H^n_\nu(r) \longrightarrow -1$$

$p \in S^n_\nu(r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_\nu$ $\quad \mathbb{R}p$ es >0

$\therefore$ $T_p S^n_\nu(r)$ tiene índice ν

$p \in H^n_\nu(r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1}$ $\quad \mathbb{R}p$ es <0

$\therefore$ $T_p H^n_\nu(r)$ tiene índice ν.