Hipercuádricas:

pseudo-esfera:

$$S^n_\nu(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu \mid \langle x, x \rangle_\nu = r^2\}$$

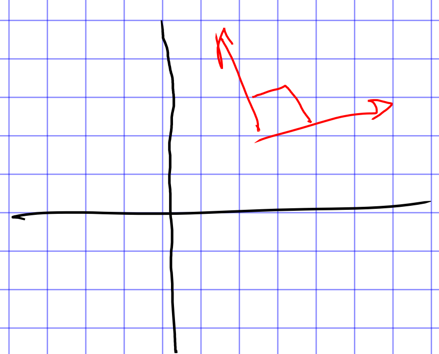
espacio pseudo-hiperbólico:

$$H^n_\nu(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1} \mid \langle x, x \rangle_{\nu+1} = -r^2\}$$

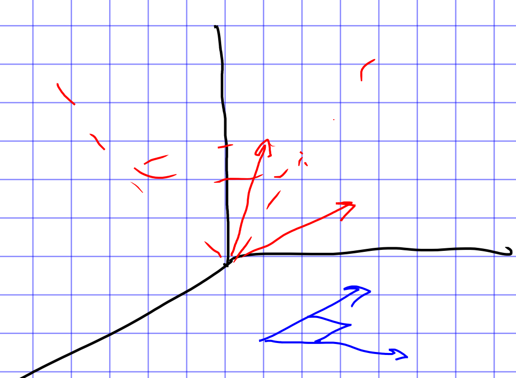
Para ambos:

$$T_p Q = (\mathbb{R}p)^\perp$$

Perpendicularidad en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2_1$:



En $\mathbb{R}^3_1$



Tenemos las homotecias:

$$S^n_\nu = S^n_\nu(1) \longrightarrow S^n_\nu(r)$$
$$x \longmapsto rx$$

$$H^n_\nu = H^n_\nu(1) \longrightarrow H^n_\nu(r)$$
$$x \longmapsto rx$$

También tenemos la anti-isometría:

$$\sigma : \mathbb{R}^{n+1}_\nu \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}_{n+1-\nu}$$
$$(\underset{\nu}{x}, \underset{n+1-\nu}{y}) \longmapsto (y, x)$$

$$\mathbb{R}^{n+1}_\nu : \langle (x,y), (x',y') \rangle_\nu = -x \cdot x' + y \cdot y'$$
$$\mathbb{R}^{n+1}_{n+1-\nu} : \langle (y,x), (y',x') \rangle_{n+1-\nu} = $$
$$= -y \cdot y' + x \cdot x'$$

y mapea anti-isométricamente:

$$S^n_\nu(r) \longrightarrow H^n_{n-\nu}(r)$$

Se puede ver que:

Lema: Se tienen difeomorfismos:

$$S^n_\nu(r) \cong \mathbb{R}^\nu \times S^{n-\nu}$$
$$H^n_\nu(r) \cong S^\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}$$

Notar que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, $S^0 = \{\pm 1\}$.

$$\therefore \quad S^n(r) = S^n_0(r) \cong S^n$$

$$H^n_0(r) \cong S^0 \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n$$

$$H^n_0(r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_1$$

$$-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -r^2$$

el último consta de dos componentes que contienen a $(r, 0, \dots, 0)$ y a $(-r, 0, \dots, 0)$, resp. La primera se denota $H^n(r)$ y se llama el espacio hiperbólico n-dim.

En general:

$$Q = g^{-1}(\varepsilon r^2) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_\nu$$

$$g(x, x) = \langle x, x \rangle_\nu$$

y su operador de forma es:

$$S(v) = -\bar{D}_v\left(\frac{P}{r}\right) = -\frac{1}{r} v$$

pues $\bar{D}$ es la misma independientemente de ν.

Corolario: $Q = g^{-1}(\varepsilon r^2)$ es totalmente umbílica de curvatura seccional constante $\varepsilon \frac{1}{r^2}$.

Luego:

$S^n_\nu(r)$ tiene dim $= n$, índice ν

$K \equiv \frac{1}{r^2}$

$H^n_\nu(r)$ tiene dim $= n$ índice ν

$K \equiv -\frac{1}{r^2}$.

el caso Riemanniano:

$S^n(r)$, $H^n(r)$

$K \equiv$: $\frac{1}{r^2}$ $\quad -\frac{1}{r^2}$

Geodésicas en $S^n_\nu(r)$:

Tomamos $r = 1$.

Sean $p \in S^n_\nu$, $v \in T_p S^n_\nu = (\mathbb{R}p)^\perp$

$\therefore$ $\langle p, p \rangle_\nu = 1$, $\langle v, v \rangle_\nu = ?$

i) $\langle v, v \rangle_\nu > 0$ y suponemos $\langle v, v \rangle_\nu = 1$.

Sea $\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}_\nu$

$$\gamma_v(t) = \cos t\, p + \sin t\, v$$

$\therefore$ $\langle \gamma_v(t), \gamma_v(t) \rangle_\nu = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$\therefore$ $\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow S^n_\nu$.

Resta ver que $\ddot{\gamma}_v(t) \perp T_{\gamma_v(t)} S^n_\nu$

i.e.: $\ddot{\gamma}_v(t) \in \mathbb{R}\gamma_v(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

lo cual es claro pues de hecho:

$$\ddot{\gamma}_v = -\gamma_v$$

2) $\langle v, v\rangle_\nu < 0$ y suponemos $\langle v, v\rangle_\nu = -1$

El plano $\mathbb{R}p \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}v$ tiene signatura $(1,1)$ para $\langle\, ,\rangle_\nu$.

Sea:

$$\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}_\nu$$

$$\gamma_v(t) = \cosh(t)\, p + \sinh(t)\, v$$

$$\therefore \langle \gamma_v(t), \gamma_v(t)\rangle_\nu = \cosh^2(t) \underbrace{\langle p, p\rangle_\nu}_{=1} + \sinh^2(t) \underbrace{\langle v, v\rangle_\nu}_{-1} = 1$$

$$\therefore \quad \gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow S^n_\nu$$

$$\gamma_v(0) = p, \quad \gamma_v'(0) = v$$

Además:

$$\ddot{\gamma}_v = \gamma_v$$

$$\therefore \quad \ddot{\gamma}_v(t) \perp T_{\gamma_v(t)} S^n_\nu.$$

3) $\langle v, v\rangle_\nu = 0.$

Se toma $\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow S^n_\nu$

$$\gamma_v(t) = p + tv$$

la cual es geodésica.

Todas estas geodésicas satis_facen:

$$\gamma_v(\mathbb{R}) = S^n_v \cap (\mathbb{R}p \oplus \mathbb{R}v)$$

Las geodésicas de H^n_v son:

$$p \in H^n_v \ , \ \langle p, p \rangle_{v+1} = -1$$

1) $\langle v, v \rangle_{v+1} = -1$

$$\gamma_v(t) = \cos t \, p + \sin t \, v$$

2) $\langle v, v \rangle_{v+1} = +1$

$$\gamma_v(t) = \cosh(t) \, p + \sinh(t) \, v$$

3) $\langle v, v \rangle_{v+1} = 0$

$$\gamma_v(t) = p + tv$$

Para el caso Riemanniano H^n 2) es la única posibilidad.

Recordamos el grupo:

$O(\nu, n+1-\nu)$:

$$A \in GL(n+1, \mathbb{R}) \quad A^T I_{\nu, n+1-\nu} A = I_{\nu, n+1-\nu}$$

$$I_{\nu, n+1-\nu} = \begin{pmatrix} -I_\nu & 0 \\ 0 & I_{n+1-\nu} \end{pmatrix}$$

que actúa por isometrías sobre $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ y por tanto actúa por isometrías sobre $S^n_\nu(r)$:

$$O(\nu, n+1-\nu) \times S^n_\nu(r) \longrightarrow S^n_\nu(r)$$

$$(A, x) \longmapsto Ax$$

$$\left(\langle x, x \rangle_\nu = r^2 \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle_\nu = r^2 \right)$$

La acción es transitiva en $S^n_\nu(r)$ y de hecho dados:

$$p, q \in S^n_\nu(r)$$

$$u_1, \dots, u_n \in T_p S^n_\nu(r), \; v_1, \dots, v_n \in T_q S^n_\nu$$

bases ortonormales, $\exists$ φ isometría de $S^n_\nu(r)$ dada por un elemento de $O(\nu, n+1-\nu)$ $\ni$:

$$\varphi(p) = q$$

$$d\varphi_p(u_i) = v_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

φ es la transformación lineal

A $\exists!$
$$Ap = q \,,\; Au_i = v_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

$\therefore$ A mapea:
$$\left\{ \frac{p}{r}, u_1, \dots, u_n \right\} \longrightarrow \left\{ \frac{q}{r}, v_1, \dots, v_n \right\}$$

bases ortonormales de $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu}$

$\therefore$ $A \in O(\nu, n+1-\nu)$.

Se concluye que:
$$\mathrm{Iso}(S^n_\nu(r)) = O(\nu, n+1-\nu)$$

Similarmente:
$$\mathrm{Iso}(H^n_\nu(r)) = O(\nu+1, n-\nu)$$

$\therefore$ $\mathrm{Iso}(S^n) = O(n+1)$
$$\mathrm{Iso}(H^n) = O(1, n)$$

De hecho:
$$S^n \cong O(n+1)/O(n)$$
$$H^n \cong O(1,n)/O(n)$$

Algunos resultados importantes.

*) Lema de Gauss. (pag. 127)

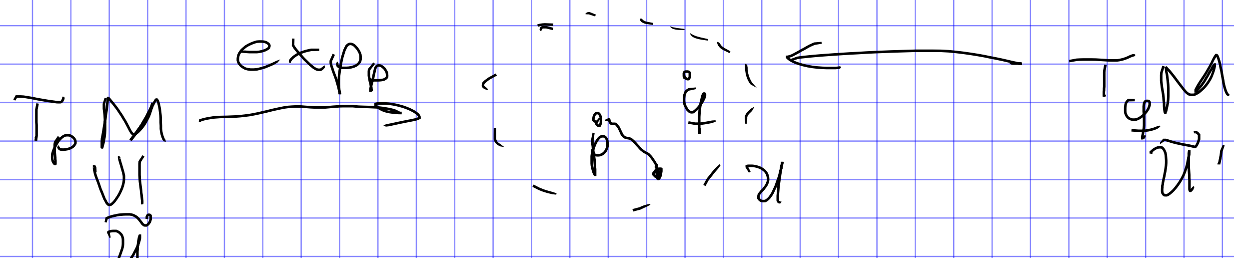
Pregunta: ¿$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ es isometría? No.

¿qué tanto es isometría?

Lema: $p \in M$, $x \in T_pM \setminus \{0\}$
$v_x, w_x \in T_x(T_pM) \ni v_x \in \mathbb{R}x$

$$\Rightarrow \langle d(\exp_p)_x(v_x), d(\exp_p)_x(w_x) \rangle = \langle v_x, w_x \rangle$$

*) Todo punto $p \in M$ tiene una vecindad $\mathcal{U} \ni \mathcal{U}$ es vecindad normal de todos sus puntos ($\mathcal{U}$ se dice convexa). (pag. 130)



En particular $\forall\, q_1, q_2 \in \mathcal{U}\ \exists!$ geodésica en $\mathcal{U}$ de q_1 a q_2.