Más resultados importantes.

*) Longitud de arco. (pag. 131)

$$\alpha : I \longrightarrow M$$

$$L(\alpha) = \int_I \sqrt{|\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)}|}\, dt$$

Si M es de Lorentz y $\alpha : [a,b] \to M$ es geodésica temporal, entonces $L(\alpha)$ es el tiempo transcurrido de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$.

*) Distancia Riemanniana (pag. 132)

M Riemanniana conexa

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d(p,q) = \inf \left\{ L(\alpha) \;\middle|\; \begin{array}{l} \overset{\text{suave a pedazos}}{\alpha} : [0,1] \longrightarrow M \\ \alpha(0) = p,\ \alpha(1) = q \end{array} \right\}$$

(M,d) es espacio métrico.

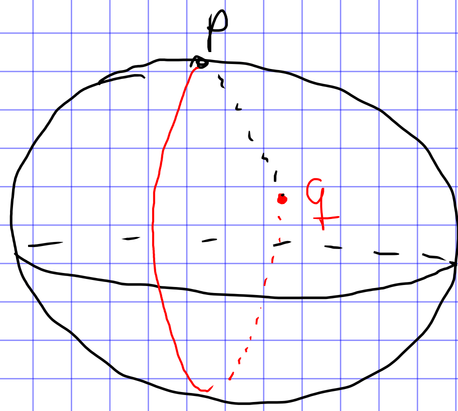
Corolario (pag. 137)
Si $\alpha : [0,1] \longrightarrow M$, $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$ minimiza distancia entre p, q:

$$L(\alpha) = d(p,q)$$

entonces α es reparametrización

de una geodésica.

Pero:



Pero: Toda geodésica en M Riemanniana minimiza longitud localmente.

Proposición: M Riemanniana completa simplemente conexa con $K \leq 0$. Entonces

$$\exp_o : T_oM \longrightarrow M$$

es difeomorfismo $\forall\, o \in M$.

*) Tma. de Hopf - Rinow. (pag. 158)
Para M Riemanniana conexa son equivalentes:

(MC) (M, d) es completo.

(C_1) $\exists\, p \in M \ni \exp_p : T_pM \longrightarrow M$ es sobre.

(C) M es geodésicamente completo: toda geodésica maximal está definida en $\mathbb{R}$.

(HB) Todo cerrado acotado en M es compacto.

Prop.: (pag. 138)
M Riemanniana completa conexa $\Rightarrow$ $\forall\, p, q \in M$ $\exists$ α geodésica de p a q $\ni$ $L(\alpha) = d(p,q)$.

Ejemplos de Riem. con $K \leq 0$ (son simétricos)

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \underset{\text{iso.}}{\cong} H^2$$

$$\{Z \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid Z^* Z < I_n\}$$

todo dominio simétrico acotado de un $\mathbb{C}^n$.

$$H^2 \cong SO(1,2)/O(2) \cong SU(1,1)/U(1)$$

$$\cong SU(n,n)/S(U(n)\times U(n)) \qquad n \geq 2$$

$$\mathbb{B}^n \cong SU(1,n)/U(n)$$

$$-4 \leq K \leq -1 \qquad n \geq 2.$$

(ver Helgason)

*) Prop.: (pag. 144)

V espacio vectorial de Lorentz ($(1, n-1) \leftarrow$ signatura)

$v, w \in V$ temporales. Entonces:

(1) $|\langle v, w\rangle| \geq \sqrt{|\langle v, v\rangle|}\sqrt{|\langle w, w\rangle|}$

(2) $\exists\, \varphi \ni$

$$\langle v, w\rangle = \pm\sqrt{|\langle v, v\rangle|}\sqrt{|\langle w, w\rangle|}\,\cosh\varphi$$

Prop.: (pag. 147)
M Lorentziana, $o \in M$, $\mathcal{U}$ vec. normal de M. Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{U}$ geodésica temporal de o a p. Entonces

$$L(\gamma) \geq L(\alpha)$$

$\forall\, \alpha$ curva temporal de o a p.

*) Existencia de métricas:

Caso Riemanniano:
Toda variedad admite métricas Riemannianas.

Prop.: (pag. 149)
M variedad suave. Son equivalentes:
(1) M posee métrica Lorentziana.
(2) M posee métrica Lorentziana orientable temporalmente.
(3) $\exists\, X \in \mathfrak{X}(M) \ni X_p \neq 0 \quad \forall p \in M$.
(4) M es nocompacta ó
M es compacta con característica de Euler $\chi(M) = 0$.

$\therefore$ S^n admite métrica de Lorentz $\iff$ n impar.

*) Por Hopf-Rinow:

M Riemanniana compacta $\Rightarrow$ M completa.

Pero:

M Lorentziana compacta $\not\Rightarrow$ M geodésicamente completa.

Toro de Clifton-Pohl (pag. 193).

Sea $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con la métrica:
$$g = \frac{2\,du\,dv}{u^2+v^2}$$

$$g \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{u^2+v^2} \\ \frac{1}{u^2+v^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det = -\frac{1}{(u^2+v^2)^2}$$

Sea $\mu : M \longrightarrow M$

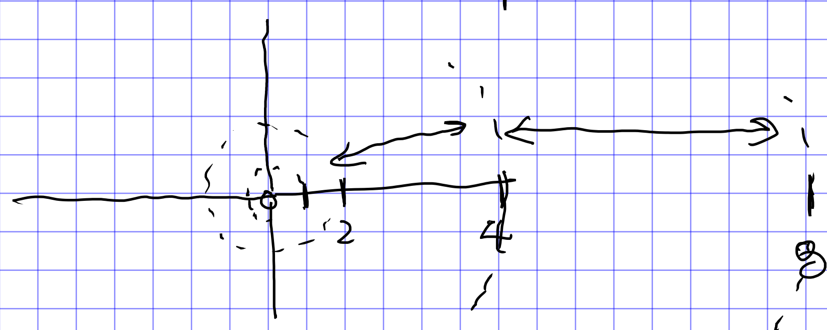
$$\mu(u,v) = 2(u,v)$$

$\therefore$ μ es isometría.

Sea $\Gamma = \{\mu^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq Iso(M)$.

El toro es:

$$T = M/\Gamma$$



T posee una métrica inducida por g. T es compacto.

$\alpha(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right)$ es geodésica inextendible.

Otro ejemplo (ver Helgason)

Sea G grupo de Lie conexo que admite una métrica p.R. bi-invariante.

Entonces en $e \in G$ la identidad

$$\exp_e \text{ p.R.} \equiv \exp \text{ de grupo de Lie.}$$

existen ejemplos de tales G con:

$$\exp(\mathfrak{g}) \neq G$$

E.g. $SL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{R})$ con $n \geq 2$.

Si G es grupo de Lie compacto conexo $\Rightarrow \exp(\mathfrak{g}) = G$.

Todo G compacto conexo es producto de algunos de los siguientes:

$$S^1, SO(n), SU(n), Sp(n),$$
$$G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$$

dim $\longrightarrow$ 14,

*) Volumen en M p. R. (pag. 195)

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \qquad \text{localmente.}$$

$$\Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

es una n-forma bien definida (no depende de las coordenadas).

$$\therefore \quad C_c(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \int_M f\omega$$

define una medida ó volúmen en M invariante bajo isometrías.