En el ejemplo:

$$A \xrightarrow{\pi} A/F$$

dado $a \in A$ tenemos un mapeo continuo:

$$\tau(a) : A/F \longrightarrow A/F$$

que se obtiene del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "L_a"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi \circ L_a"] & A \arrow[d, "\pi"] \\
A/F \arrow[r, dashed, "\tau(a)"'] & A/F
\end{tikzcd}$$

que usa la existencia de $\tilde{\varphi}$ dado φ, con $\tilde{\varphi}$ continua (si φ lo es)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
A/F \arrow[r, "\tilde{\varphi}"'] & X
\end{tikzcd}$$

cuando φ es constante en clases de equivalencia.

Para el Teorema 3.2:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G/H \supseteq U \arrow[d, dotted, "\tilde{\varphi}"] \\ & M \supseteq \tilde{\varphi}(U) = \varphi(\pi^{-1}(U)) \end{tikzcd}$$

$$g \longmapsto gp$$

$\tilde{\varphi}$ continuo ✓ (pues φ lo es)

$\tilde{\varphi}$ abierto ?

Basta ver que φ es abierta:

$gU^2 \subseteq V$:

Por probar $U^2 \subseteq g^{-1}V$

$g^{-1}V$ es vecindad de e.

La continuidad del producto nos dice que $\exists$ W vecindad de e $\ni$:

$$W \times W \longrightarrow g^{-1}V$$
$$(x,y) \longmapsto xy$$

$\therefore$ $W^2 \subseteq g^{-1}V$

Claramente:

$$G = \bigcup_{x \in G} x U^{\circ} \quad (e \in U)$$

G 2do numerable implica:

$$G = \bigcup_{n} g_n U^{\circ} = \bigcup_{n} g_n U$$

//

Ejemplo:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \{ [z] \mid z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \}$$

[ ] = clase respecto de:

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \ni z = \lambda w$$

$$\therefore \ [z] = \mathbb{C} z \setminus \{0\}$$

$$GL(n+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$$A \cdot [z] = [Az]$$

La isotropía de $[e_1]$ es:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a \in \mathbb{C}^* \\ A \in GL(n, \mathbb{C}) \end{array} \right\}$$

que es subgrupo cerrado.

$$\therefore \quad \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \cong GL(n+1, \mathbb{C}) / H$$

tiene una única topología localmente compacta 2do numerable $\Rightarrow$

$$GL(n+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

es acción continua.

En la página 122:

$$(X^+ f)(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\exp(tX) \cdot p)$$

$$= df_p\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tX) \cdot p \right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tX) \cdot p \right)(f)$$

$$\therefore \quad X_p^+ = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tX) \cdot p \quad (= X_p^\#)$$

Lema 3.5 usa:

$$[X,Y] = [\tilde{X},\tilde{Y}]_e$$

y por tanto dice que:

$$[\bar{X},\bar{Y}] = -\overline{[\tilde{X},\tilde{Y}]_e}$$

$[\ ,\ ]$ en $\mathfrak{X}(G)$.

$$\therefore \quad \begin{aligned} [X,Y]^{\ell} &= [\tilde{X},\tilde{Y}]_e \\ [X,Y]^{r} &= [\bar{X},\bar{Y}]_e \end{aligned} \implies [X,Y]^{r} = -[X,Y]^{\ell}$$

Teorema 3.4 se basa en ver que: $X, \tilde{X}, \bar{X} \qquad X^{+}$

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g\cdot p \end{aligned}$$

y que $X^{+} = d\Phi(\bar{X})$ no $d\Phi(\tilde{X})$

Si la acción de G en M es por la derecha:

$$M \times G \longrightarrow M$$

entonces:

$$X'_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p \cdot \exp(tX)$$

y en este caso:

$$[X', Y'] = [X, Y]'$$

corchetes en $\mathfrak{g}$ usando L_g.