En el Lema 5.1 de la página 128 tenemos:

$$\begin{tikzcd}
d\varphi^{-1}(0) \subseteq \mathfrak{g} \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d, leftrightarrow, "\exp"] \arrow[d, shift left=8ex] & \mathfrak{X} \arrow[d, "\exp"] \\
\varphi^{-1}(e) \subseteq G \arrow[r, "\varphi"] & X
\end{tikzcd}$$

Se induce algebraicamente:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d] & d\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{X} \\
\mathfrak{g}/d\varphi^{-1}(0) \arrow[ur, "\cong"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \varphi(G) \subseteq X \\
G/\varphi^{-1}(e) \arrow[ur, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

Por probar en el lema que el 2do diagrama se cumple a nivel de grupos de Lie.

Para (ii):

G generado por $\exp(\mathfrak{g})$.

(G conexo)

$\therefore\ \varphi(G)$ es generado por

$$\varphi(\exp(\mathfrak{g})) = \\ = \exp(d\varphi(\mathfrak{g}))$$

Si X_1 es el subgrupo de Lie conexo de X con álgebra de Lie $d\varphi(\mathfrak{g})$ entonces:

$$X_1 \text{ generado por } \exp(d\varphi(\mathfrak{g}))$$

$\therefore\ \varphi(G) = X_1$ como conjuntos y esto da la estructura de $\varphi(G)$.

Para (iii) se prueba primero:

Lema: G grupo de Lie, $H \trianglelefteq G$ subgrupo cerrado. Entonces G/H admite una única estructura de grupo de Lie tal que

$$G \times G/H \longrightarrow G/H$$

$$g \cdot (g_1 H) = g g_1 H$$

es analítica.

La estructura abstracta de grupo es dada por:

$$G/H \times G/H \longrightarrow G/H$$
$$(g_1 H)\cdot(g_2 H) = g_1 g_2 H$$

y basta ver que:

$$G/H \times G/H \longrightarrow G/H$$
$$(gH, xH) \longmapsto g^{-1}xH$$

es analítica. Para ello usamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(g,x) \arrow[r, mapsto] & g^{-1}x \\
G\times G \arrow[r] \arrow[d, "I\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\
G\times G/H \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\times I"'] & G/H \\
G/H\times G/H \arrow[ur, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

$$(gH, xH) \longmapsto g^{-1}xH$$

$$\Phi(g, xH) = g^{-1}xH$$

Se toma ψ sección local de π para obtener:

$$\begin{tikzcd}
G \times G/H \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & G/H \\
G/H \times G/H \arrow[u, bend left, "\psi \times I"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $\alpha = \Phi \circ (\psi \times I)$ que es analítica.

Observar que si ψ es sección en eH entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
e \in \psi(U) \subseteq G \arrow[r, "L_{g_0}"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"'] \\
eH \in U \subseteq G/H \arrow[u, bend left, "\psi"] \arrow[r, "L_{g_0}"] & G/H \arrow[u, bend right, "\tilde{\psi} = L_{g_0} \circ \psi \circ L_{g_0^{-1}}"']
\end{tikzcd}$$

define una sección analítica $\tilde{\psi}$ en una vecindad de $g_0 H$.

(Checar que $\pi \circ \tilde{\psi} = id_{L_{g_0}(U)}$)

Para completar (iii) consideramos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \varphi(G) \subseteq X \\
G/H \arrow[ur, "\theta"] &
\end{tikzcd}
$$

$$gH \longmapsto \varphi(g) \qquad H = \varphi^{-1}(e)$$

θ es isomorfismo de grupos abstractos. Por probar que θ es isomorfismo analítico, i.e. θ, θ^{-1} son analíticos.

Con el mapeo:

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

analítico tenemos:

$$d\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(G/H)$$

que es suprayectiva (pues existen secciones $\psi \ni \psi \circ \pi = id$)

Por tanto:

$$\mathrm{Lie}(G/H) = d\pi(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/d\pi^{-1}(0)$$

con $d\pi^{-1}(0) \overset{(i)}{=} \mathrm{Lie}(\pi^{-1}(e))$

$$= \mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$$

$\therefore \quad d\pi(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$

dado por:

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longrightarrow d\pi(\mathfrak{g})$$

$$z + \mathfrak{h} \longmapsto d\pi(z)$$

Usando $d\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow d\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{X}$
tenemos:

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \xrightarrow{\cong} d\varphi(\mathfrak{g})$$

$$z + \mathfrak{h} \longmapsto d\varphi(z)$$

Pues $d\varphi^{-1}(0) = \mathrm{Lie}(\varphi^{-1}(e)) = \mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$.

El isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} &\longrightarrow d\varphi(\mathfrak{g}) \\ Z+\mathfrak{h} &\longmapsto \varphi(Z) \end{aligned}$$

induce uno local entre G/H y $\varphi(G)$, el cual debe tener un diagrama conmutativo (solo localmente) con las exponenciales:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\exp"'] & d\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{X} \arrow[d, "\exp"] \\ G/H \arrow[r, "\substack{\text{isom.} \\ \text{local}} = F"'] & \varphi(G) \subseteq X \end{tikzcd}$$

$F = ?$

Observamos que:

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \xrightarrow{\exp} G/H$$

$$\exp(Z+\mathfrak{h}) = \exp(Z)H$$

$$F(\exp(Z)H) = \exp(d\varphi(Z))$$
$$= \varphi(\exp(Z)) \quad \forall Z \in \mathfrak{g}.$$
localmente

Pero $\exp(\mathfrak{g})$ genera a G.

$\therefore$ $F(gH) = \varphi(g)$ $\forall g$ en una vec. de e.

Recordamos que el isomorfismo algebraico:

$$G/H \xrightarrow{\Theta} \varphi(G) \qquad (H = \varphi^{-1}(e))$$
$$gH \longmapsto \varphi(g)$$

$\therefore$ $\Theta = F$ en una vecindad de e

$\therefore$ Θ es analítico con inversa analítica en una vecindad de e.

Para ver la analiticidad de Θ, Θ^{-1} en $g_0H \in G/H$ dado:

$$\Theta(gH) = \Theta(g g_0^{-1} H g_0 H)$$
$$= \Theta(g g_0^{-1} H)\, \Theta(g_0 H)$$

g en una vec. de g_0

$\iff$ $g g_0^{-1}$ en una vec. de e

$\therefore$ $g g_0^{-1} H$ esta en una vec. de eH en G/H

$$\begin{tikzcd}
G/H: & g_0H \arrow[r, "L_{g_0^{-1}}"] \arrow[d, "\Theta"'] & eH \arrow[d, "\Theta"] \\
X \supseteq \varphi(G): & \Theta(g_0) & \bullet \arrow[l, "L_{\Theta(g_0H)}"]
\end{tikzcd}$$

Para el Corolario 5.2 (i):

$$\mathrm{Ad}_G(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}).$$

G conexo $\Rightarrow$ G generado por $\exp(\mathfrak{g})$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ad}_G(G)$ generado por

$$\mathrm{Ad}_G(\exp(\mathfrak{g})) \underset{\uparrow}{=} e^{\mathrm{ad}(\mathfrak{g})}$$

(5) de Helgason

Pero $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ es generado por

$$\exp(\mathrm{Lie}(\mathrm{Int}(\mathfrak{g}))) = e^{\mathrm{ad}(\mathfrak{g})}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Ad}_G(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}).$$

$\ker(\mathrm{Ad}_G) = Z$ (centro de G)

$$\sigma \in Z \iff \sigma g \sigma^{-1} = g \quad \forall g \in G$$
$$\iff \sigma \exp(X) \sigma^{-1} = \exp(X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

(3) de Helgason

$$\Longleftrightarrow \quad \exp(\mathrm{Ad}_G(\sigma)(X)) = \exp(X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exp(t\,\mathrm{Ad}_G(\sigma)(X)) = \exp(tX) \quad \forall X \in \mathfrak{g},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ad}_G(\sigma)(X) = X \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma \in \ker(\mathrm{Ad}_G)$$

$\therefore$ $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \cong G/Z$ via Ad_G

i.e.:

$$G/Z \xrightarrow{\cong} \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$$
$$gZ \longmapsto \mathrm{Ad}_G(g)$$

Para el "Remark" en la página 130 tenemos:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_3$$
$$[X_1, X_2] = X_3$$

y todo lo demás 0.

Queremos calcular $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ y para ello necesitamos $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. De la definición de $[\ ,\ ]$ y en la base X_1, X_2, X_3:

$$\operatorname{ad}(X_1) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\operatorname{ad}(X_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad}(X_3) = 0$$

$$\therefore \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & b & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$