Continuando con:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_3$$

teníamos:

$$ad(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Vemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore$ $ad(\mathfrak{g})$ es Abeliana.

Sabemos que:

Int($\mathfrak{g}$) es generado por $\exp(ad(\mathfrak{g}))$

Si $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$X^2 = 0$$

por tanto:

$$\exp(X) = e^X = I_3 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \dots$$
$$= I_3 + X$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & d & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a+c & b+d & 1 \end{pmatrix} \in \exp(ad(\mathfrak{g}))$$

$$\therefore \quad \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

isomorfo a $\mathbb{R}^2$ vía:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$$
$$(a,b) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo de exponenciación!

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad e^{t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

pero $e^{t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ se puede calcular directamente.

De regreso a $ad(\mathfrak{g})$, $Int(\mathfrak{g})$.

centro de $\mathfrak{g} \neq 0$

$Int(\mathfrak{g}) \neq e$ y Abeliano

$\therefore$ de centro no trivial.

Dem. Corolario 5.3 página 130:

$$Z(\mathfrak{g}) = 0$$

$$\therefore \ ad : \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} ad(\mathfrak{g})$$

$$G' = Int(\mathfrak{g}), \quad Lie(G') = ad(\mathfrak{g})$$

$$Ad' : G' \longrightarrow GL(ad(\mathfrak{g}))$$

$$ad' : ad(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(ad(\mathfrak{g}))$$

Se denota $Z = Z(G') = Ker(Ad_{G'})$ y por el Corolario 5.2:

$$\theta : G'/Z \xrightarrow{\cong} Ad_{G'}(G')$$

$$gZ \longmapsto Ad_{G'}(g)$$

pero $Ad_{G'}(G') = Int(ad(\mathfrak{g}))$

Tenemos:

$$s = ad : \mathfrak{g} \longrightarrow ad(\mathfrak{g})$$

$$X \longmapsto ad(X)$$

isomorfismo. De lo cual se obtiene el isomorfismo

$$S : G' \longrightarrow Int(ad(\mathfrak{g}))$$
$$g \longmapsto S \circ g \circ S^{-1} \quad GL(\mathfrak{g})$$

pues si $g \in G' = Int(\mathfrak{g}) \leq Aut(\mathfrak{g})$

$$ad(\mathfrak{g}) \xrightarrow{S^{-1}} \mathfrak{g} \xrightarrow{g} \mathfrak{g} \xrightarrow{S} ad(\mathfrak{g})$$

$\therefore S \circ g \circ S^{-1} \in Aut(ad(\mathfrak{g}))$

Pero $S \circ g \circ S^{-1} \in Int(ad(\mathfrak{g}))$ y S es isomorfismo por el segundo párrafo de la página 127.

Hemos obtenido:

$$\Theta : G'/Z \xrightarrow{\cong} Int(ad(\mathfrak{g}))$$

$$S : G' \xrightarrow{\cong} Int(ad(\mathfrak{g}))$$

Se considera y calcula $S^{-1} \circ \Theta$

Primero: $X \in \mathfrak{g}$, G' gen. por $e^{ad(\mathfrak{g})}$

$$S(e^{ad(X)}) = s \circ e^{ad(X)} \circ S^{-1} = ?$$

vemos que: $Y \in \mathfrak{g}$

$$s \circ e^{ad(X)} \circ S^{-1}(ad(Y)) =$$

$$= S \circ e^{ad(X)}(Y)$$

$$= S\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{ad(X)^k}{k!}(Y)\right)$$

$$= ad\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{[X,[X, \dots, Y]}_{[X,\ ] \text{ aplicado } k \text{ veces}} \dots]\right)$$

como ad es homomorfismo de álgebras de Lie

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{[ad(X),[ad(X), \dots,}_{[ad(X),\ ] \text{ aplicado } k \text{ veces}} ad(Y)] \dots]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \, ad'(ad(X))^k (ad(Y))$$

$$= e^{ad'(ad(X))} (ad(Y))$$

Se sigue que: $\forall X \in \mathfrak{g}$

$$S(e^{ad(X)}) = e^{ad'(ad(X))}$$
$$= Ad'(e^{ad(X)})$$

Concluimos que $S = Ad'$.
Luego se obtiene que el isomorfismo:

$$G'/Z \xrightarrow{S^{-1} \circ \Theta} G'$$

cumple $S^{-1}(\Theta(gZ)) = S^{-1}(Ad'(g)) = g$.
Esto implica $Z = \{e\}$.

Definición en la página 130:

$\mathfrak{g}$ álgebra de Lie

$\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ subálgebra de Lie.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}"] & \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \arrow[d] & \supseteq & \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \arrow[d] \\
 & \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) & \supseteq & K^*
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ es compactamente encajada en $\mathfrak{g}$

$\overset{}{\underset{\text{def.}}{\iff}}$ K^* es compacto.

$\mathfrak{g}$ es compacta

$\iff$ $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$ es compactamente encajada en $\mathfrak{g}$

$\iff$ $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ es compacto.

Ejemplos:

1) $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ Abeliana.

$\therefore \ ad_{\mathfrak{g}} \equiv 0$

$\therefore \ Int(\mathfrak{g}) = \{I_{\mathfrak{g}}\}$ compacto

$\therefore \ \mathfrak{g}$ es álgebra de compacta.

2) Sea G grupo de Lie compacto. Entonces:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "ad"] \arrow[d, "exp"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \supseteq ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "e"] \arrow[d] \\ G \arrow[r, "Ad_G"] & Ad_G(G) \supseteq Int(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

Pero $Int(\mathfrak{g}) = Ad_G(G_0)$

G compacto $\Rightarrow G_0$ compacto

$\Rightarrow Int(\mathfrak{g})$ compacto

$\Rightarrow \mathfrak{g}$ compacta

3) $sl(2,\mathbb{R}) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$

Sean:

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$\therefore$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son subálgebras Abelianas de $sl(2,\mathbb{R})$ y por tanto álgebras compactas. Pero:

$\mathfrak{a}$ no es compactamente encajada en $sl(2,\mathbb{R})$

$\mathfrak{b}$ sí es compactamente encajada en $sl(2,\mathbb{R})$.