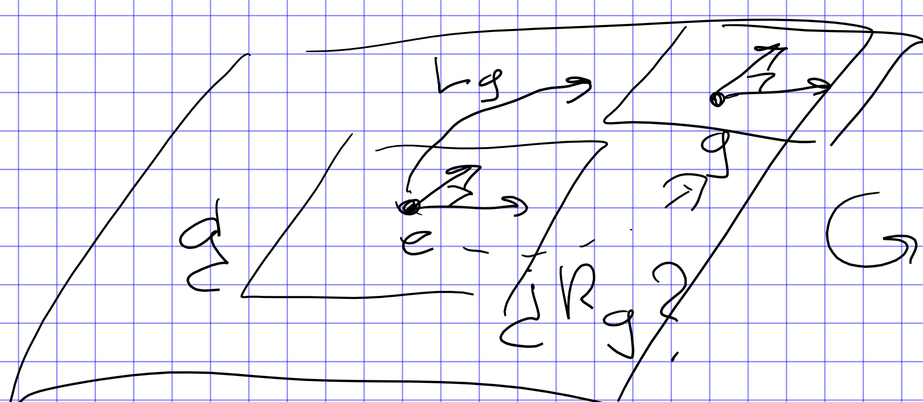
En la página 134 se hace una construcción que se puede generalizar como sigue:

Sea G grupo de Lie con álgebra de Lie semisimple. (G no es necesariamente ni conexo ni compacto)

Luego la forma de Killing B de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ es no degenerada.



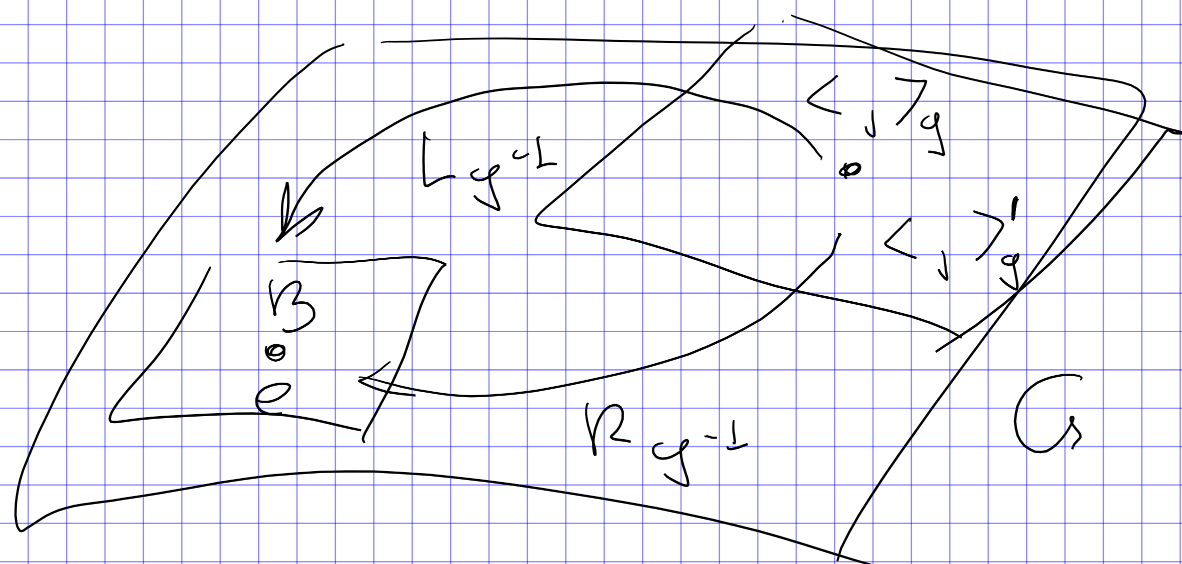
Se define una métrica pseudo-Riemanniana en G por:

$$\langle u, v\rangle_g = B(d(L_{g^{-1}})(u), d(L_{g^{-1}})(v))$$

$u, v \in T_gG$, $g \in G$

$\therefore \langle\ ,\ \rangle$ es métrica pseudo-Riemanniana G-invariante por la izquierda.

Afirmación: $\langle\ ,\ \rangle$ es también invariante por la derecha, como consecuencia de haber usado B.



$$\langle u, v\rangle'_g = B\left(d(R_{g^{-1}})(u), d(R_{g^{-1}})(v)\right)$$

Observamos que:

$$\langle\ ,\ \rangle'_g = \langle\ ,\ \rangle_g$$
$$\iff B\left(d(R_{g^{-1}})(u), d(R_{g^{-1}})(v)\right) =$$
$$= B\left(d(L_{g^{-1}})(u), d(L_{g^{-1}})(v)\right)$$
$$\forall\, u, v \in T_g G$$

$(T_gG = d(L_g)(\mathfrak{g}))$

$$\Longleftrightarrow \quad B(d(R_{g^{-1}})(d(L_g)(X)), d(R_{g^{-1}})(d(L_g)(Y))) = B(X,Y) \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

$$\Longleftrightarrow \quad B(d(L_g \circ R_{g^{-1}})(X), d(L_g \circ R_{g^{-1}})(Y)) = B(X,Y) \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}$$

$(C_g = L_g \circ R_{g^{-1}})$

$$\Longleftrightarrow \quad B(Ad(g)(X), Ad(g)(Y)) = B(X,Y) \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}$$

y esto último sí se cumple.

Conclusión:

G admite una única métrica pseudo-Riemannia bi-invariante (invariante por la izquierda y la derecha) $\langle , \rangle$ tal que:

$$\langle , \rangle_e = B$$

Sea ∇ su conexión de Levi-Civita. Sean $X, Z \in \mathfrak{g}$ y $\tilde{X}, \tilde{Z}$ los correspondientes campos en G invariantes por la izquierda.

$$\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X} = ?$$

Afirmación: $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X} = 0$
y por tanto las geodésicas de G respecto de $\langle \, , \rangle$, ∇ que pasan por e son subgrupos uniparamétricos.

Por la fórmula (2) en la página 48:

(fórmula de Koszul)

$$2\langle \tilde{Z}, \nabla_{\tilde{X}} \tilde{X} \rangle =$$

$$= \tilde{X}(\cancelto{0}{\langle \tilde{Z}, \tilde{X} \rangle}) + \langle \tilde{X}, [\tilde{Z}, \tilde{X}] \rangle$$
$$+ \tilde{X}(\cancelto{0}{\langle \tilde{Z}, \tilde{X} \rangle}) + \langle \tilde{X}, [\tilde{Z}, \tilde{X}] \rangle$$
$$- \tilde{Z}(\cancelto{0}{\langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle}) - \cancelto{0}{\langle \tilde{Z}, [\tilde{X}, \tilde{X}] \rangle}$$

(Ver libro de O'Neill)

Estos términos son 0 pues $\langle \tilde{Z}, \tilde{X} \rangle$, $\langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle$ son constantes:

$$\langle \tilde{Z}, \tilde{X} \rangle_g = B(d(L_{g^{-1}})_g(\tilde{Z}), d(L_{g^{-1}})_g(\tilde{X}))$$
$$= B(Z, X) \quad \forall g \in G.$$

Para los otros dos términos:

$$B(Ad(g)(\ ), Ad(g)(\ )) = B(\ ,\ )$$
$$\Rightarrow B(ad(Z)(\ ),\ ) + $$
$$+ B(\ , ad(Z)(\ )) = 0$$

$$\Rightarrow \langle [\tilde{Z}, \tilde{X}], \tilde{X} \rangle + \langle \tilde{X}, [\tilde{Z}, \tilde{X}] \rangle = 0$$

en e

y trasladando en todo punto.

Luego $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X} = 0$. //

Teorema:
Si G es grupo semisimple, entonces G admite una métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante cuyo valor en e es B, y cuyas geodésicas a través de e son subgrupos uniparamétricos.

Si G es además compacto, entonces usando $-B$ tenemos que G es Riemanniana completa.

M Riemanniana.

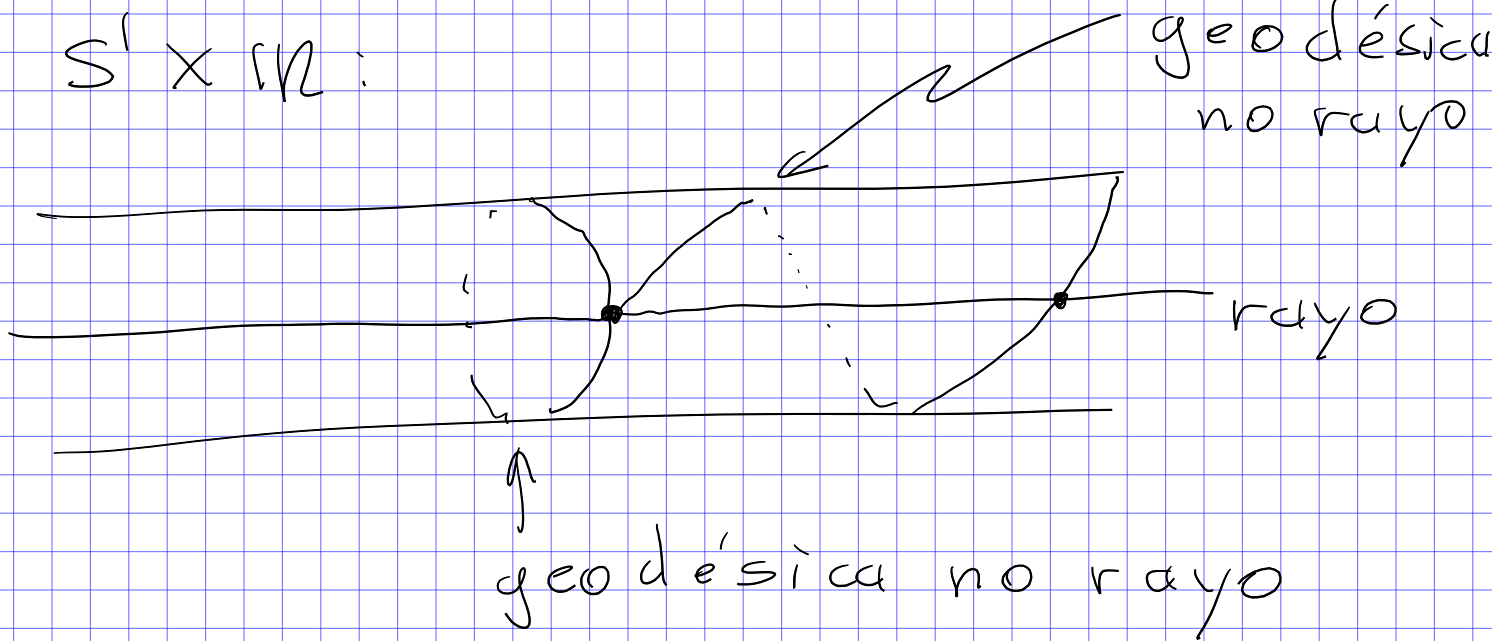
$\gamma : [0, +\infty) \longrightarrow M$ se dice rayo si:

*) γ es geodésica.

*) $\underbrace{\ell(\gamma|_{[t_1,t_2]})}_{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt} = \underbrace{d(\gamma(t_1), \gamma(t_2))}_{\inf\{\ell(\alpha) \mid \alpha \text{ de } \gamma(t_1) \text{ a } \gamma(t_2)\}}$ $\forall\, t_1 \leq t_2$

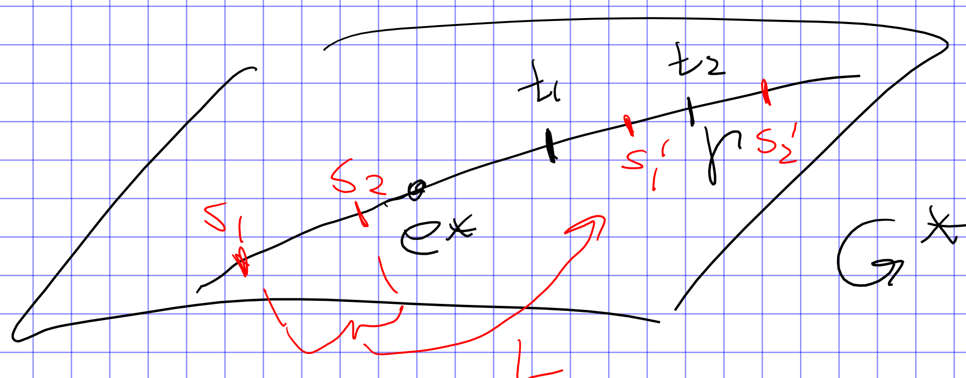
Ejemplo de rayos:

$S^1 \times \mathbb{R}$:



Para la demostración en la página 134.

$$\underset{\text{rayo}}{\gamma : [0, +\infty)} \longrightarrow G^*$$



$\therefore$ $\gamma \subseteq$ subgrupo uniparamétrico que realiza distancia en todos los puntos.

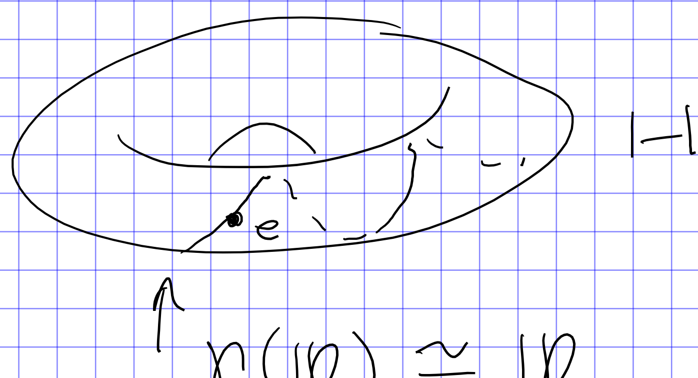
Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G^*$ el subgrupo uniparamétrico que miniza longitud así construido.

$\therefore \quad \pi(\gamma(\mathbb{R})) \subseteq G$ es conexo Abeliano.

$\therefore \quad H = \overline{\pi(\gamma(\mathbb{R}))}$ es compacto conexo Abeliano.

$\therefore \quad H \cong (S^1)^k$

Gráficamente:



Un teorema de Kronecker nos dice que $\exists \ (t_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ $\ni t_n \longrightarrow +\infty$ pero:

$$\pi(\gamma(t_n)) \longrightarrow e.$$