Sobre la página 134 tenemos las siguientes observaciones:

$\pi : G^* \longrightarrow G$ recubrimiento universal.

En particular, π es difeomorfismo local, por tanto localmente inyectiva y así

$\ker(\pi)$ es discreto

Afirmación: $\ker(\pi) \leq Z(G^*)$

(Esto vale para cualquier mapeo recubridor

$$\pi : \hat{G} \longrightarrow G$$

de grupos)

Sea $g \in G^*$ y $h \in \ker(\pi)$. Por probar que:

$$gh = hg$$

Sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow G^*$ curva con $\alpha(0) = e^*$, $\alpha(1) = g$.

Entonces:

$$\pi(h\alpha(t)h^{-1}\alpha(t)^{-1}) =$$

$$= \underbrace{\pi(h)}_{e}\,\pi(\alpha(t))\,\underbrace{\pi(h^{-1})}_{e}\,\pi(\alpha(t))^{-1}$$

$$= e$$

$\therefore \quad h\alpha(t)h^{-1}\alpha(t)^{-1} \in \operatorname{Ker}(\pi) \quad \forall t \in [0,1]$.

Por continuidad de α y como $\operatorname{Ker}(\pi)$ es discreto:

$$h\alpha(t)h^{-1}\alpha(t)^{-1} = e \quad \forall t \in [0,1]$$

pues $\alpha(0) = e$.

$\therefore \quad h\alpha(t) = \alpha(t)h \quad \forall t$

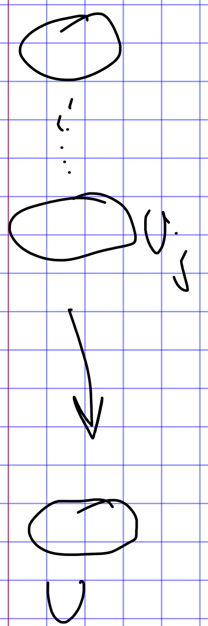
$\therefore \quad hg = gh$ //

En general:

$$\pi : \widehat{M} \longrightarrow M$$

mapeo continuo entre varie_

conexas se dice ser recubridor si:



$\forall x_0 \in M$ $\exists$ U vec. de x_0 en M tal que:

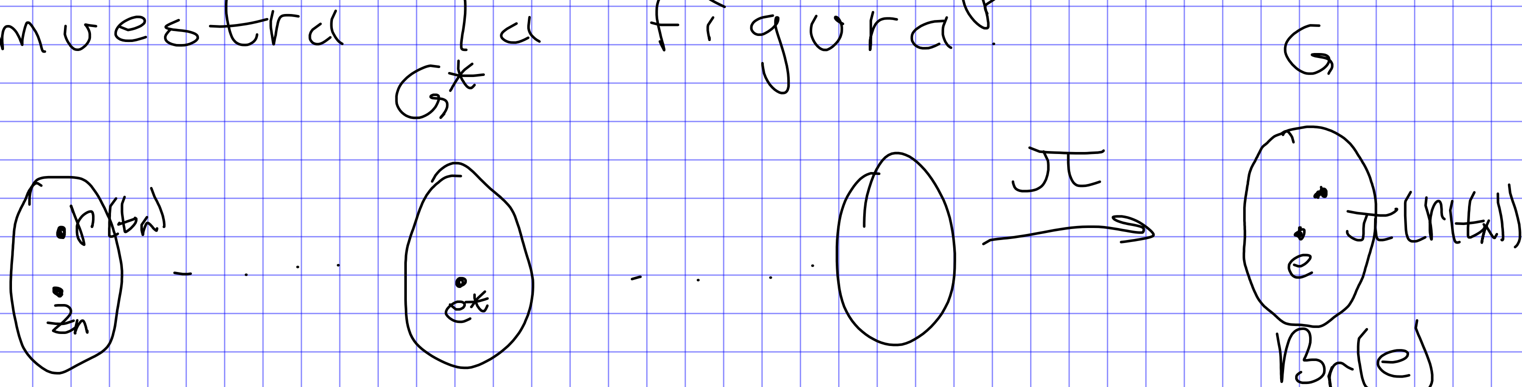
$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} U_j$ unión disjunta

$\exists$ $\pi|_{U_j} : U_j \longrightarrow U$ es difeomorfismo.

(U is said to be evenly covered)

De regreso a la página 134:

$z_n \in G^*$ se escogen como muestra la figura:



$\pi(z_n) = e \Rightarrow d(z_n, r(t_n)) = d(e, \pi(r(t_n)))$

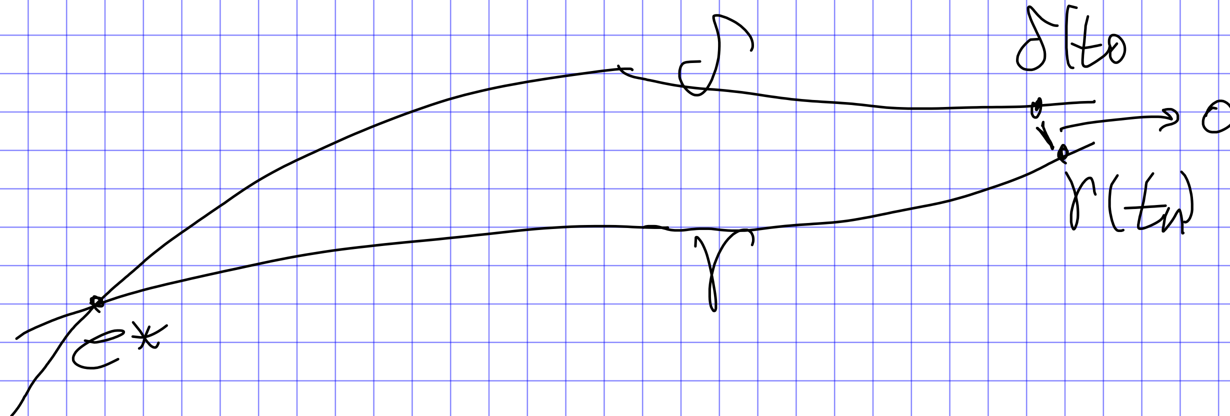
Para probar:

$$d(\delta(t_n), z_n) = d(\gamma(t_n), z_n)$$

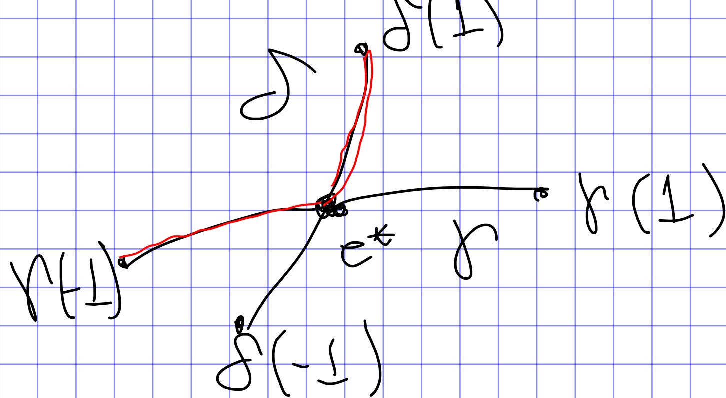
observamos que:

$$\begin{aligned} d(\delta(t_n), z_n) &= d(a\gamma(t_n)a^{-1}, z_n) \\ &= d(a\gamma(t_n)a^{-1}, a\, a^{-1}z_n) \\ &= d(\gamma(t_n)a^{-1}, a^{-1}z_n) \\ &= d(\gamma(t_n)a^{-1}, z_n a^{-1}) \\ &= d(\gamma(t_n), z_n) \end{aligned}$$

La ecuación (4) nos da:

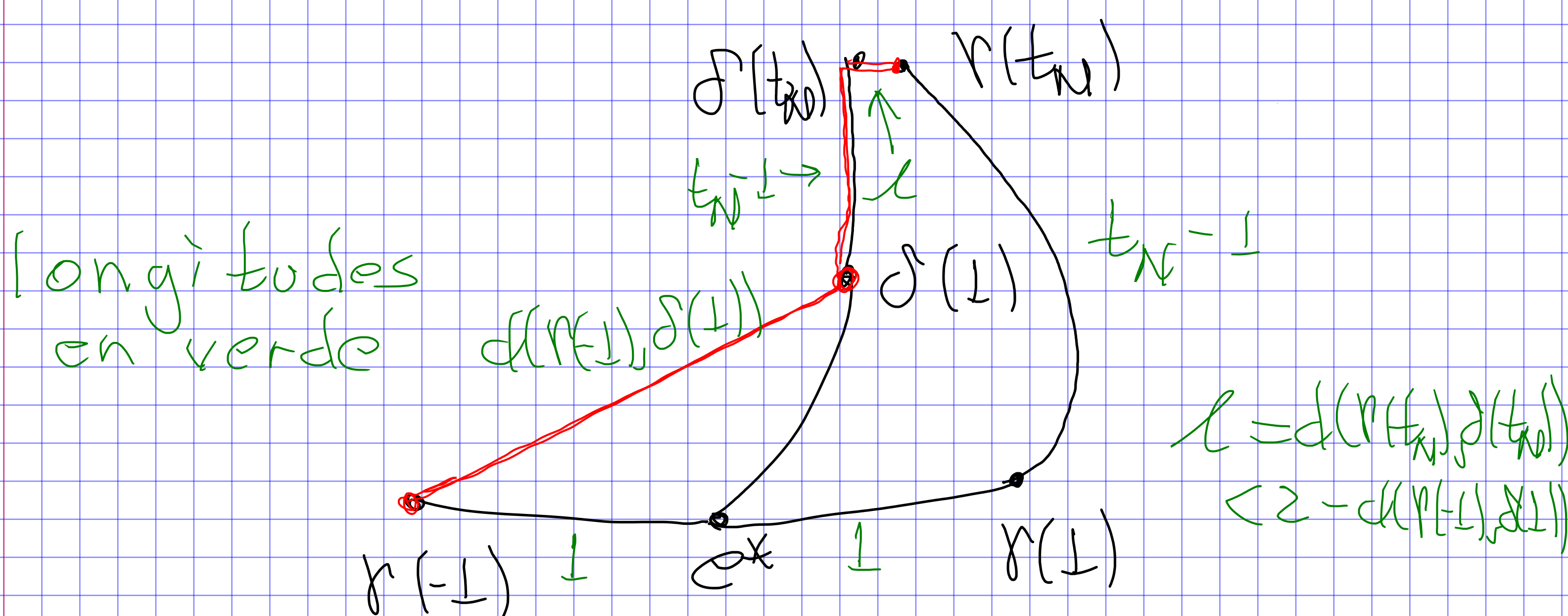


Si $\gamma \neq \delta \Rightarrow \gamma'(0) \neq \delta'(0)$:



La curva en rojo <u>no</u> minimiza longitud.

La curva 3 es:



3 va de $\gamma(-1)$ a $\gamma(t_N)$ y tiene longitud $< d(\gamma(-1), \gamma(t_N))$

Esto contradice que γ es

geodésica minimizante todo el tiempo.

$\therefore \quad \gamma = \partial \quad$ en $\mathbb{R}$

$\therefore \quad \gamma(t) = a\,\gamma(t)\,a^{-1} \quad \forall a \in G^*$
$t \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad \gamma(\mathbb{R}) \subseteq Z \leftarrow$ discreto.
$(\mathrm{Lie}(Z) = Z(\mathfrak{g}) = 0)$

$\therefore \quad \gamma(\mathbb{R}) = e^*$

que contradice que γ define un rayo, y por tanto G^* es compacto.

//

Proposición 6.10:
G compacto conexo
$\Rightarrow \exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ es sobre.

La demostración se obtiene modificando parte de la demostración del Teorema 6.9 como sigue:

Sabemos que:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \underbrace{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}_{\text{semisimple}}$$

$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{R}^n \quad (n \geq 0)$

Tomamos en $\mathfrak{g}$:

$$Q_e = \langle\ ,\ \rangle_0 \oplus \left(-B_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}\right)$$

$\langle\ ,\ \rangle_0$ cualquier producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Afirmación:

Q_e es $Ad(G)$-invariante.

$$Q_e(Ad(g)(X), Ad(g)(Y)) = Q_e(X,Y)$$

$\forall g \in G,\ X,Y \in \mathfrak{g}$.

Esto se sigue de que:

$\mathrm{Ad}(g)$ preserva $B_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = B_{\mathfrak{g}}|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$
$\forall g \in G$.

y de que:

$$\mathrm{Ad}(g)|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})} = \mathrm{id}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$$

Por tanto, usando la demostración de 6.9:

G posee una métrica Riemanniana bi-invariante.

y en esta métrica las geódesicas son traslaciones de grupos uniparamétricos.

$\therefore \quad \underset{\text{de grupos de Lie}}{\exp} = \underset{\text{de variedades Riemannianas.}}{\mathrm{Exp}_e} : \mathfrak{g} = T_eG \longrightarrow G$

G Riemanniana compacta
$\Rightarrow$ G completa

$\Rightarrow$ Exp_e sobre.

$\Rightarrow$ $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ es sobre //

Observación:

$\exp : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow SL(n, \mathbb{R})$
<u>no</u> es sobre.

Para $n=2$ se pueden des-
cribir las matrices:

$$e^X \quad \text{con } X \ 2\times2$$
de traza cero.