Sobre la página 156:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$\therefore$ $W = \mathbb{R}e_1$ es A-invariante y además $0, W, \mathbb{R}^2$ son los únicos subespacios A-invariantes.

$\therefore$ A no es semisimple.

Afirmación:
$\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Hom}(V, V)$ conmutativo:
$\mathcal{S}$ semisimple $\Longleftrightarrow$ $\forall\, s \in \mathcal{S}$, s es semisimple.

Dem.: Usar las ideas del libro Representations of Compact Lie groups (Bröcker, tom Dieck) en el Capítulo II, sección 2. //

Si $A = S + N$ (descomposición de Jordan) entonces:

$$S = p(A), \quad N = q(A)$$

Si $Ae = \lambda e$, $e \neq 0$

$\Rightarrow \quad Ne = q(A)e = q(\lambda)e$

$\therefore \quad q(\lambda) = 0$ y $Ne = 0$

$\therefore \quad \lambda e = Ae = Se + Ne = Se$

Afirmación: K alg. cerrado $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Hom}(V,V)$ conmutativa semisimple, $W \subseteq V$ irreducible

$\Rightarrow \quad \dim W = 1.$

Dem.: $\forall S \in \mathcal{S}$: $S(W) \subseteq W$

K alg. cerrado y $\mathcal{S}$ conmutativa $\Rightarrow \exists\, v \in W$ eigenvector común de $S \in \mathcal{S}$.

$\therefore \quad S(Kv) \subseteq Kv \subseteq W \quad \forall S \in \mathcal{S}$

$\Rightarrow \quad W = Kv.$

Observación:

En la demostración v como eigenvector común satisface:

$S \in \mathcal{S}$:

$$Sv = \lambda(S)v$$

donde $\lambda(S) \in K$ depende de S.

Si $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Hom}(V, V)$ es subespacio entonces:

$$a, b \in K, \quad S_1, S_2 \in \mathcal{S}$$

$$\lambda(aS_1 + bS_2)v = (aS_1 + bS_2)v$$

$$= a(S_1 v) + b(S_2 v)$$

$$= (a\lambda(S_1) + b\lambda(S_2))v$$

$\therefore \quad \lambda \in \mathcal{S}^*$.

Para el cálculo antes de la Prop. 1.1:

S descompone
$$V = \bigoplus_i V_i \quad \text{(eigenespacios)}$$

$$A = S + N \quad \text{(desc. de Jordan)}$$

Dado $v \in V \ni$:
$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

escribimos:
$$v = \sum_i v_i \qquad (v_i \in V_i)$$

Como $SA = AS$, $A(V_i) \subseteq V_i$

$\therefore (A - \lambda I)^k V_i \subseteq V_i$

$\therefore \; 0 = (A - \lambda I)^k v =$
$$= \sum_i \underbrace{(A - \lambda I)^k v_i}_{V_i}$$

$\therefore \quad (A-\lambda I)^k v_i = 0 \quad \forall i.$

Por otro lado,

$$N_i = A - \lambda_i I$$

$\therefore \quad N_i + (\lambda_i - \lambda_1) I =$

$$= A - \lambda_i I + (\lambda_i - \lambda_1) I$$

$$= A - \lambda_1 I$$

$$\Rightarrow \quad (N_i + (\lambda_i - \lambda_1) I)^k v_i = 0$$

$\therefore$ si $v_i \neq 0$ entonces $-(\lambda_i - \lambda_1)$ es eigenvalor de N_i

N_i es nilpotente

$\Rightarrow \quad \lambda_i = \lambda_1.$

$\therefore \quad v_i = 0 \quad \forall i \neq 1.$

$\therefore \quad v = v_1$

Conclusión:

Todo eigenvector generalizado de A es eigenvector de S.

Ahora §2:

$\mathfrak{g}$ álgebra de Lie

$\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ álgebra derivada consta de:

$$\sum_{i=1}^{h} c_i [X_i, Y_i] \quad , \quad c_i \in K$$
$$X_i, Y_i \in \mathfrak{g}$$
$$h \in \mathbb{Z}_+$$

Es ideal:

$z \in \mathfrak{g}$:

$$\left[z, \sum_{i=1}^{h} [X_i, Y_i]\right] \in \mathfrak{D}\mathfrak{g}$$

Luego se define:

$$\mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \quad \mathcal{D}^1\mathfrak{g} = \mathcal{D}\mathfrak{g}$$

$$\mathcal{D}^{n+1}\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathcal{D}^n\mathfrak{g})$$

$\mathfrak{g}$: X

$\mathcal{D}\mathfrak{g}$: $[X, Y]$

$\mathcal{D}^2\mathfrak{g}$: $[[X, Y], [Z, W]]$

$\mathcal{D}^3\mathfrak{g}$: $[\quad , \quad]$

Claramente:

$$\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}^2\mathfrak{g} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{D}^n\mathfrak{g} \supseteq \dots$$

$\therefore$ $\exists\, h \geq 1$ más pequeño tal que:

$$\mathcal{D}^r\mathfrak{g} = \mathcal{D}^h\mathfrak{g} \quad \forall\, r \geq h.$$

Observación:

Por inducción es fácil ver que $\mathcal{D}^r(\mathcal{D}^s\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^{r+s}\mathfrak{g}$

Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces sabemos que:

$$\mathcal{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$$

$$\therefore \quad \mathcal{D}^n\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \quad \forall n.$$

El caso "totalmente opuesto" es que exista k $\ni$:

$$\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = 0.$$

Cuando esto ocurre $\mathfrak{g}$ se dice soluble (solvable).

Teorema (Jacobson)

Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se escribe:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$$

con $\mathfrak{s}$ subálgebra semisimple y $\mathfrak{r}$ ideal soluble.