Para el Lema 3.3 página 163:

$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(H_0, 0)$, H_0 regular

$\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ eigenvalores de $ad(H_0)$.

Entonces:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathfrak{g}(H_0, \lambda_i)$$

$$= \underbrace{\mathfrak{g}(H_0, 0)}_{\mathfrak{h}} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{g}(H_0, \lambda_i)}_{\mathfrak{g}'}$$

En particular, esta descomposición da la forma canónica de Jordan de $ad(H_0)$:

$ad(H_0)$:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \mathfrak{g}(H_0,0) & \cdots & \mathfrak{g}(H_0,\lambda_i) & \cdots \\ \hline
\mathfrak{g}(H_0,0) & \boxed{\begin{matrix}0 & \ddots & 1 & \\ & \ddots & & \ddots \\ & & & 0\end{matrix}} & & & \\
\vdots & & \ddots & & \\
\mathfrak{g}(H_0,\lambda_i) & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_i & \ddots & 1 & \\ & \ddots & & \ddots \\ & & & \lambda_i\end{matrix}} & \\
\vdots & & & & \ddots
\end{array}$$

Con $H \in S$ $(d(H) \neq 0)$:

$$ad(H) : h \oplus \mathfrak{g}' \longrightarrow h \oplus \mathfrak{g}'$$

y preserva la suma con

$$H' = ad(H)|_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}'$$

no-singular.

$\therefore$ 0 aparece como eigenvalor de $ad(H)$ solamente en h.

$\Rightarrow \mathfrak{g}(H,0) \subseteq h = \mathfrak{g}(H_0,0)$

Por la elección de H_0:

$$\mathfrak{g}(H,0) = \mathfrak{h}.$$

Para el Lema 3.4 página 164:

$$H \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(H_0,0)$$

$$X \in \mathfrak{g}(H_0,\lambda)$$

$$ad(X)\,ad(H)\big(\mathfrak{g}(H_0,\mu)\big) \subseteq \mathfrak{g}(H_0,\lambda+\mu)$$

Luego: si $\lambda = \lambda_j \neq 0$

$ad(X)\,ad(H)$:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \mathfrak{g}(H_0,0) & \cdots & \mathfrak{g}(H_0,\lambda_i) & \cdots & \\
\hline
\mathfrak{g}(H_0,0) & \boxed{0} & & * & & \\
\vdots & & \ddots & & & \\
\mathfrak{g}(H_0,\lambda_i) & * & & \boxed{0} & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Se usa que:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m b_m \end{pmatrix}$$

Como se aplica: $H_1, H_2, H \in h$

$$tr(ad([H_1, H_2])\, ad(H)) =$$
$$= tr(ad(H_1)\, ad(H_2)\, ad(H) - ad(H_2)\, ad(H_1)\, ad(H)) = 0$$

porque hay una base en la cual $ad(H_1)$, $ad(H_2)$, $ad(H)$ son triangulares superiores.

Luego de probar que h es Abeliana, se afirma que es maximal Abeliana. De no serlo $\exists\ X \in g \ni$:

$$[h, X] = 0 \quad , \ X \notin h$$

Escribimos:

$$X = H_1 + Y$$
$$\quad \Uparrow \qquad \Uparrow$$
$$\quad \mathfrak{h} \qquad \mathfrak{g}'$$

$$\therefore [Y, \mathfrak{h}] = 0, \quad Y \in \mathfrak{g}' \setminus \{0\}$$

$$\therefore \quad ad(H_0)(Y) = 0, \quad Y \in \mathfrak{g}' \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad d(H_0) = \det(ad(H_0)|_{\mathfrak{g}'}) = 0$$

$$\Rightarrow\Leftarrow$$

(pues $d(H_0) \neq 0$)

En la página 165 se afirma que S es derivación. Pues:

$$S|_{V_\beta} = \beta(H) I_{V_\beta}$$

Si $X \in V_\alpha$, $Y \in V_\beta$: ($\because [V_\alpha, V_\beta] \subseteq V_{\alpha+\beta}$)

$$S([X,Y]) = (\alpha(H) + \beta(H))[X,Y]$$

$$= [\alpha(H)X, Y] + [X, \beta(H)Y]$$

$$= [SX, Y] + [X, SY]$$