Grupos de Lie 2021
Segundo Parcial
Soluciones.

Problema 1:
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con forma de Killing B y $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Probar que el complemento ortogonal $\mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{h}$ respecto de B es un ideal. Dar un ejemplo para el cual la suma no es directa.

Solución:

Sabemos que:

$$B([X,Y],Z) = -B(X,[Z,Y])$$

$\forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Con $\mathfrak{h}$ ideal, $\mathfrak{h}^\perp$ es claramente subespacio. Además, si $X \in \mathfrak{h}^\perp$, $Y \in \mathfrak{g}$, $Z \in \mathfrak{h}$ entonces:

$$B([X,Y],Z) = -B(X,[Z,Y]) = 0$$

pues $[Z,Y] \in h$, $X \in h^\perp$. Concluimos que:

$$[X,Y] \in h^\perp$$

$\forall X \in h^\perp$, $Y \in g$, y por tanto $h^\perp$ es ideal.

Si $g = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ con corchetes nulos:

$$[u,v] = 0 \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^n$$

entonces $ad(u) = ad(v) = 0$ y

$$B(u,v) = tr(ad(u)\, ad(v)) = 0$$

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Por tanto, todo subespacio $h \leq \mathbb{R}^n$ es ideal y satisface:

$$h^\perp = \mathbb{R}^n$$

Luego la suma $h + h^\perp$ no es directa si $h \neq 0$.

Alternativamente, se puede considerar:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$$

donde $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

para la cual se cumple:

$[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$.

En este caso hay que calcular B con más cuidado. Respecto de la base X, Y, Z:

$\mathrm{ad}(X) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{ad}(Z) : 0$

$\mathrm{ad}(Y) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Las tres son triangulares inferiores estrictas y cualquier producto de dos de ellas sigue siendo triangular inferior estricta y por tanto de traza 0.

Concluimos en este caso que

$$B = 0$$

$\therefore V^{\perp} = \mathfrak{g} \quad \forall V \leq \mathfrak{g}$ subespacio. Pero ahora no todo subespacio es ideal.

Por ejemplo:

$\mathbb{R}X, \mathbb{R}Y$ son subálgebras y no ideales

$\mathbb{R}X + \mathbb{R}Y$ es subespacio pero no subálgebra

$\mathbb{R}Z$ es ideal.

Basta pues tomar

$h = \mathbb{R}Z \therefore h^{\perp} = \mathfrak{g}$

y la suma $h + h^{\perp}$ no es directa.

Problema 2:
Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definir el espacio de derivaciones $\partial(\mathfrak{g})$ y probar que $ad(\mathfrak{g}) \subseteq \partial(\mathfrak{g})$. Dar un ejemplo de un álgebra de Lie para la cual la inclusión $ad(\mathfrak{g}) \subseteq \partial(\mathfrak{g})$ es propia.

Solución:

$D: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ lineal se dice derivación si cumple:

$$D([X,Y]) = [DX,Y] + [X,DY]$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$. $\partial(\mathfrak{g})$ es el espacio vectorial de todas las derivaciones.
Equivalentemente:

$$X \in \partial(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow e^{tX} \in Aut(\mathfrak{g}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

I.e. $\partial(\mathfrak{g}) = Lie(Aut(\mathfrak{g}))$

La identidad de Jacobi:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

se puede reescribir:

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$$

$\therefore$ ad(X) es derivación $\forall X \in \mathfrak{g}$ y así:

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \partial(\mathfrak{g}).$$

Si $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ con $[\,,\,]=0$ entonces:

$$\mathrm{ad}(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

$\therefore$ ad$(\mathfrak{g}) = 0$. Pero toda $T \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ cumple:

$$T([u,v]) = [Tu, v] + [u, Tv]$$

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

$\therefore$ $\partial(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$.

Luego ad$(\mathfrak{g}) \neq \partial(\mathfrak{g})$.

Se pueden dar otros ejemplos usando:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$$

del problema anterior.

Problema 3:
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Probar que $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ son solubles.

Solución:

Por inducción es fácil probar que:

$$\mathcal{D}^r(\mathcal{D}^s\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^{r+s}\mathfrak{g}.$$

También se cumple:

$$\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g} \Rightarrow \mathcal{D}^r\mathfrak{h} \leq \mathcal{D}^r\mathfrak{g}$$

Por otro lado:

$$\mathcal{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} [x_i+\mathfrak{h}, y_i+\mathfrak{h}] \;\middle|\; \begin{matrix} N \geq 1 \\ x_i, y_i \in \mathfrak{g} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{N} [x_i, y_i] + \mathfrak{h} \;\middle|\; \begin{matrix} N \geq 1 \\ x_i, y_i \in \mathfrak{g} \end{matrix} \right\}$$

$$= \pi(\mathcal{D}\mathfrak{g})$$

donde $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es el mapeo cociente.

A partir de aquí es fácil probar que:

$$\Phi^r(g/h) = \pi(\Phi^r g).$$

Supongamos que g es soluble. Entonces $\exists\, r \geq 1$ tal que:

$$\Phi^r g = 0$$

Luego tenemos:

$$\Phi^r h \leq \Phi^r g = 0$$

$$\Phi^r(g/h) = \pi(\Phi^r g) = 0$$

$\therefore\ \Phi^r h = 0,\ \Phi^r(g/h) = 0$ y ambas $h, g/h$ son solubles.

Supongamos que h y g/h son solubles.
Entonces $\exists\, r \geq 1 \ni$:

$$\Phi^r(g/h) = 0.$$

Por tanto:

$$\pi(\mathcal{D}^r(\mathfrak{g}))=0$$

donde $\pi:\mathfrak{g}\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es el mapeo cociente.

Lo anterior implica:

$$\mathcal{D}^r(\mathfrak{g})\leq \mathfrak{h}$$

Como $\mathfrak{h}$ es soluble, $\exists\, s\geq 1$ $\ni$:

$$\mathcal{D}^s\mathfrak{h}=0$$

$$\therefore\quad \mathcal{D}^{r+s}(\mathfrak{g})\leq \mathcal{D}^r(\mathfrak{h})=0$$

y $\mathfrak{g}$ es soluble.

Problema 4:

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja semisimple con una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Dado un funcional lineal $\alpha : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ definir

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H) X \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Probar que para cualesquiera dos funcionales $\alpha, \beta : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ se cumple:

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subseteq \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$$

Solución:

Sean $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}^\beta$, de modo que:

$$[H, X] = \alpha(H) X \qquad \forall H \in \mathfrak{h}.$$
$$[H, Y] = \beta(H) X$$

Entonces:

$$[H, [X, Y]] = [[H, X], Y] + [X, [H, Y]]$$

$$= \alpha(H) [X, Y] + \beta(H) [X, Y]$$

$$= (\alpha + \beta)(H)\,[X, Y] \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

$$\therefore\ [X, Y] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}.$$