Análisis Matemático II

Libro: Real Analysis,
Folland.

Tareas en:
http://www.cimat.mx/~quiroga
(ver Teaching)

→) Convergencia uniforme
(y análisis funcional)

→) Principal tema:
Integración, medidas.

Convergencia uniforme:

Sea X un espacio métrico
(por ejemplo $\mathbb{R}^d$).

Sean $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$

Decimos que:

*) $(f_n)_n$ converge puntualmente a f si $\forall x \in X$:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

$\Longleftrightarrow$ Dado $x \in X$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \ni$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

(x es dado antes, de modo que n_0 depende x)

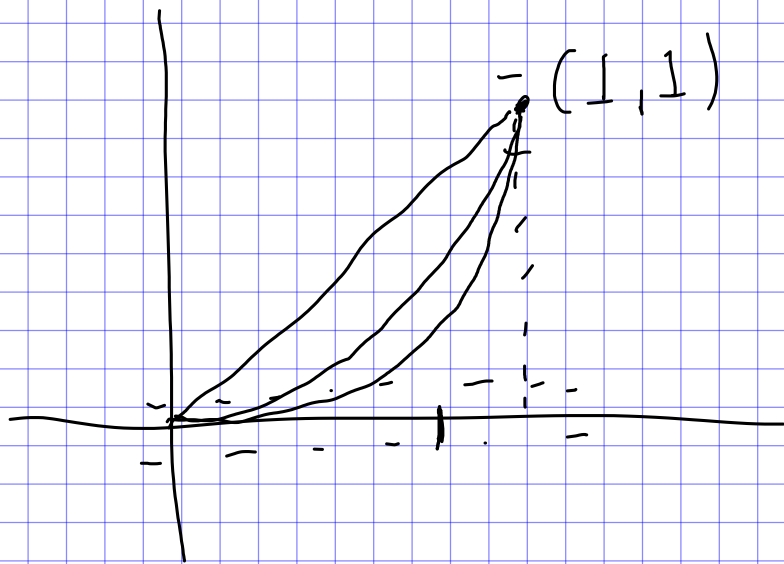
Ejemplo:

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = x^n$$

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



*) $(f_n)_n$ converge uniformemente a f si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X$$

$\iff \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tal que:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Por esta razón consideramos:

$C_b(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid f$ continua y acotada $\}$

(X espacio métrico)

Definimos: $f \in C_b(X)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$\|\cdot\|_\infty$ es una norma ya que cumple:

$$\|f\|_\infty \geq 0 \quad \forall f$$
$$\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$$
$$\|cf\|_\infty = |c| \, \|f\|_\infty$$
$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Y como toda norma define una distancia:

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty$$

Proposición:
$(C_b(X), d)$ es un espacio métrico completo.

$(f_n)_n$ Cauchy

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad \forall x \in X$$

$$\therefore \quad f(x) = \lim_n f_n(x) \ \exists \quad \forall x$$

$$|f(x) - f(y)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Cambiando a integración:

Sea $X = C \subseteq \mathbb{R}^n$ rectángulo compacto.

$$(C = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n])$$

Podemos considerar:

$C(X) \subseteq R(X)$ = funciones en X Riemann integrables.

$f \in R(X) \iff \{x \in X \mid f$ disc. en $x\}$ es de medida 0

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists (C_n)_n$ sucesión de cubos $\ni$:

$$\{x \in X \mid f \text{ disc. en } x\} \subseteq \bigcup_n C_n$$

$$\sum_n \mathrm{vol}(C_n) < \varepsilon.$$

Definimos:

$$\|f\| = \|f\|_1 = \int_X |f(x)|\,dx$$

integral de Riemann.

$\|f\|$ no es norma porque puede ocurrir que:

$$\|f\| = 0 \quad \text{con } f \neq 0.$$

Por otro lado, estamos lejos de la completitud de $(R(X), \| \ \|)$

Sea $X = [0,1]$ y enumeramos:

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} = (x_n)_n$$

definimos:

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $(f_n)_n$ converge puntualmente a:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Pero vemos que:

$$(f_n)_n \subseteq R([0,1])$$

$$f \notin R([0,1])$$

De manera intuitiva, esto nos dice que

$$(R(X), \| \ \|)$$

<u>no</u> es completo.