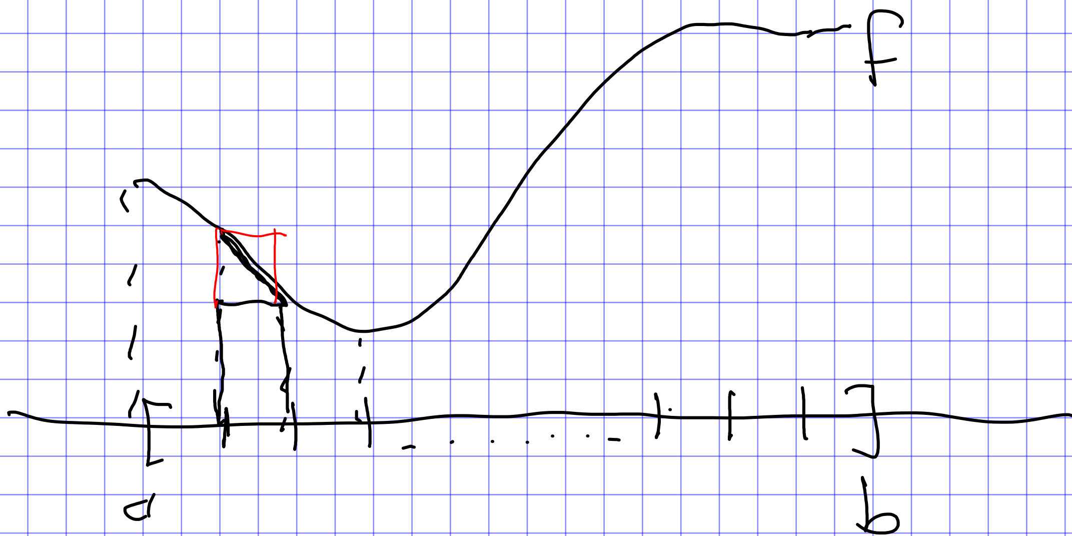
Integral de Riemann:

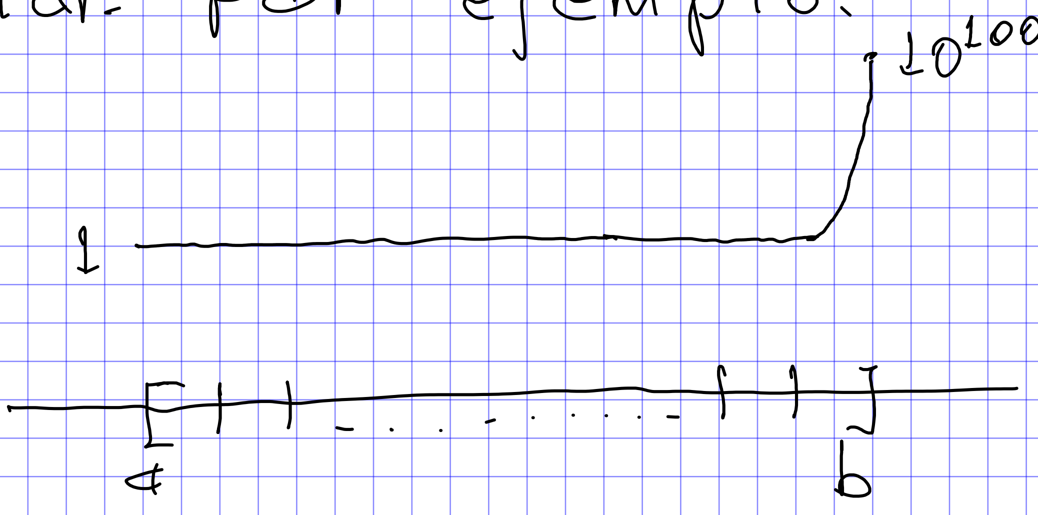
$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada



Sumas de Riemann inferiores

Sumas de Riemann superiores

Problema: Las particiones no toman en cuenta la gráfica y por tanto no consideran a cada f en particular. Por ejemplo:



Otro problema: Muchas funciones que deberían ser integrables no lo son con Riemann.

Ejemplo:

Longitud de $[0,1] = 1$

$$\Longrightarrow \int_0^1 1\,dx = 1$$

$[0,1] \cap \mathbb{Q}$ tiene medida cero

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} = (x_n)_n$$

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-\varepsilon a_n + x_n, \varepsilon a_n + x_n)}_{I_n}$$

$$\exists \quad a_n > 0, \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\varepsilon a_n$$

$$= 2\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

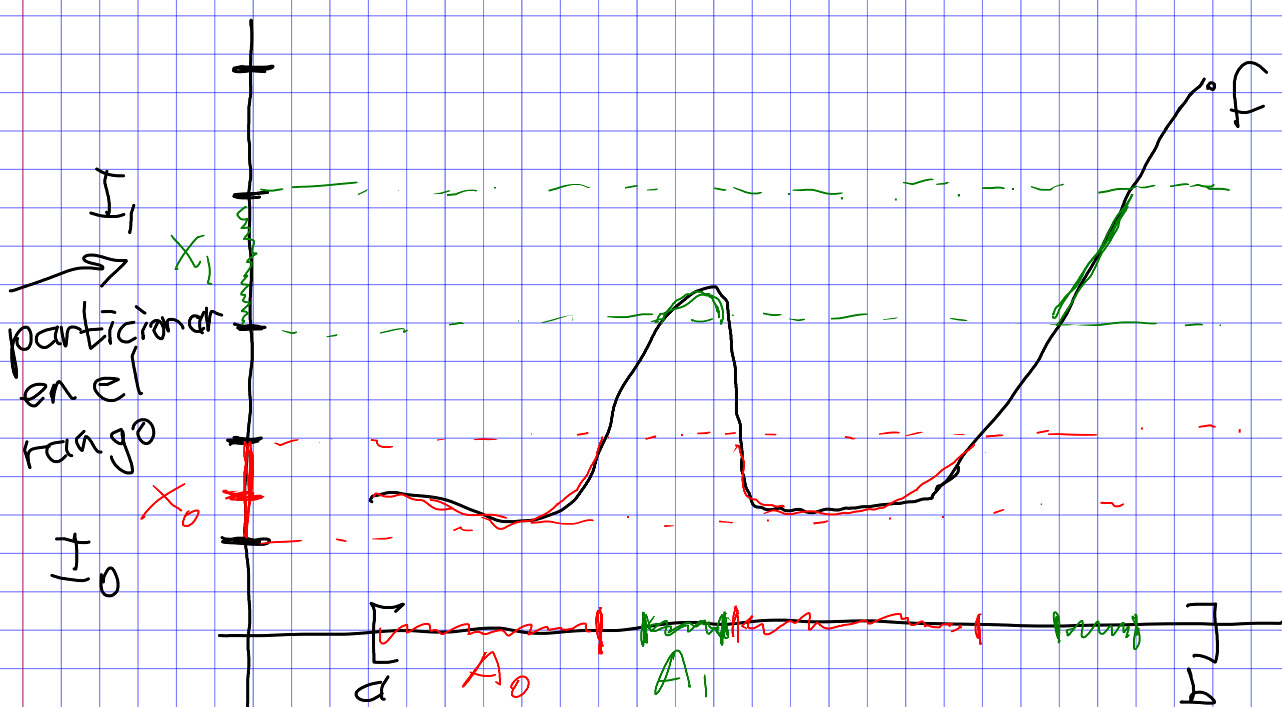
Por tanto deberíamos tener en integral de Riemann:

$$\int_0^1 \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\,dx = 0$$

Como $[0,1] = ([0,1]\cap\mathbb{Q}) \sqcup ([0,1]\cap\mathbb{Q}^c)$

$$\int_0^1 \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}^c}(x)\,dx = 1.$$

Para tomar en cuenta los valores de la función procedemos como en el dibujo:



Aproximamos por:

$$\sum_{j=0}^{n} x_j \, \ell(A_j)$$

$$A_j = f^{-1}(I_j)$$

Sin embargo, algo se nos complica:

No solamente debemos saber medir/definir $\ell(I)$ con I intervalo sino $\ell(A)$ con A conjunto.

Es decir definir:

$$\ell(A) = \int \chi_A(x)\, dx.$$

Problema: Definir una función:

$$\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que $\nu(A)$ es el volúmen de A y por tanto satisfa-ce:

$$\nu(I_1 \times \ldots \times I_n) = \prod_{j=1}^{n} \ell(I_j)$$

$I_j \subseteq \mathbb{R}$ intervalos.

(Convención $0 \cdot \infty = 0$)

Si $A, B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $\exists$ $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ congruencia (isometría seguida de traslación) entonces:

$$\nu(A) = \nu(B).$$

Si $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$ unión disjunta, entonces:

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \nu(A_j)$$

Solución: No existe tal ν.

Veamos que una tal ν no existe con el caso:

$$\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$$

Supongamos que tal ν existe.

Consideramos:

$$\varphi : [0,1) \longrightarrow \mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

$$\varphi(t) = e^{2\pi i t}$$

A partir de ν obtenemos:

$$\tilde{\nu} : \mathcal{P}(\mathbb{T}) \longrightarrow [0,+\infty]$$

$$\tilde{\nu}(A) = \nu(\varphi^{-1}(A))$$

Las propiedades de ν que se consideran arriba inducen propiedades de $\tilde{\nu}$.

$\nu([0,1)) = 1 \Longrightarrow \tilde{\nu}(\mathbb{T}) = 1$

$$\nu\left(\bigsqcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \nu(A_j)$$

$A_j \subseteq [0,1) \Longrightarrow$ misma propiedad para $\tilde{\nu}$.

ν invariante bajo traslaciones y la reflexión $x \longmapsto -x$.

$$\nu(A+x) = \nu(A) = \nu(-A)$$

$\Longrightarrow \tilde{\nu}$ invariante bajo multiplicación en $\mathbb{T}$

$$\tilde{\nu}(zA) = \tilde{\nu}(A) \quad z \in \mathbb{T}.$$

Definimos:

$z, w \in \mathbb{T}$:

$z \sim w \Longleftrightarrow z = wa$ para algún $a \in \varphi(\mathbb{Q})$.

Sea $A \subseteq \mathbb{T}$ tal que $\forall z \in \mathbb{T}$ $\exists!$ $a \in A \ni z \sim a$.

$\therefore$ $a, b \in A$, $a \sim b \Rightarrow a = b$.

$\tilde{\nu}(A) = ?$

Primero probamos que:

$$\mathbb{T} = \bigsqcup_{z \in \varphi(\mathbb{Q})} Az$$

$$Az = \{ az \mid a \in A \}$$

Si $w \in \mathbb{T} \Rightarrow \exists$ $a \in A \ni a \sim w$

$\Rightarrow \exists z \in \varphi(\mathbb{Q}) \ni w = az$

$\therefore$ $w \in Az$

$w \in Az_1 \cap Az_2 \Rightarrow w = az_1 = bz_2$

$\therefore$ $a = bz_1^{-1}z_2 = b\bar{z}_1 z_2$

$z_1, z_2 \in \varphi(\mathbb{Q}) \Rightarrow z_1^{-1}z_2 \in \varphi(\mathbb{Q})$

$\therefore$ $a \sim b \Rightarrow a = b \Rightarrow z_1 = z_2$

$\therefore \; Az_1 = Az_2$

Luego:

$$1 = \tilde{\nu}(\Pi) = \sum_{z \in \varphi(\mathbb{Q})} \tilde{\nu}(Az) = \sum_{z \in \varphi(\mathbb{Q})} \tilde{\nu}(A)$$

$$\therefore \quad 1 = 0 \quad ó \quad 1 = +\infty$$

$$\Rightarrow\!\Leftarrow$$

Se concluye que $\tilde{\nu}, \nu$ no existen.

Conclusión:

Solamente podemos definir longitud, volumen ó medida para subfamilias:

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

o en general de familias:

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

X conjunto ó espacio topológico.