Dado X espacio o conjunto ¿que propiedades deben tener las familias de conjuntos que se van a medir?

Queremos medir usando particiones, y $\emptyset$ y X deben poder medirse. Los valores de las medidas las tomaremos en $[0, +\infty]$. De modo que:

medida de $\emptyset = 0$

medida de X = el mayor de los valores.

Si $\{E_j\}_j$ de conjuntos que se pueden medir, entonces

$$\bigcup_j E_j$$

debería poderse medir. Salvo por cierta condición.

En $\mathbb{R}$ esperamos que:

$$\text{medida } \{x\} = 0$$

Y si tenemos aditividad de medidas en el caso disjunto:

$$\text{medida } \mathbb{R} = \sum_{x \in \mathbb{R}} \text{medida } \{x\} = 0$$

pero no tenemos problema con:

$$\text{medida } \mathbb{Q} = \sum_{x \in \mathbb{Q}} \text{medida } \{x\} = 0$$

Antes vimos que:

$$\underbrace{[0,1]}_{\downarrow\,\text{medida}\atop 1} = \underbrace{(\mathbb{Q} \cap [0,1])}_{\downarrow \atop 0} \cup \underbrace{(\mathbb{Q}^c \cap [0,1])}_{\downarrow \atop 1}$$

Definición:

Sea X un conjunto.

1) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice álgebra si satisface:

$$\emptyset, X \in \mathcal{A}$$
$$E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$$
$$E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cup F$$

2) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice σ-álgebra si cumple:

$$\emptyset, X \in \mathcal{A}$$
$$E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$$
$$\{E_j\}_{j=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \in \mathcal{A}$$

Observaciones:

$\mathcal{A}$ álgebra, entonces:

$$E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{A}$$

pues $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c$

$\mathcal{A}$ σ-álgebra implica $\mathcal{A}$ álgebra:

$$E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cup F \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset \cup \dots \in \mathcal{A}$$

$$\{E_j\}_{j=1}^{+\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{+\infty} E_j \in \mathcal{A}$$

Si $\{E_j\}_{j=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{A}$ entonces

1) $\exists \{F_j\}_{j=1}^{+\infty} \in \mathcal{A} \ni F_j \subseteq F_{j+1} \ \forall j$

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j$$

e.g. $F_j = \bigcup_{h=1}^{j} E_h$

2) $\exists \{A_j\}_{j=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{A} \ni A_j \cap A_h = \emptyset \ \forall j \neq h$

y $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$

e.g. usando 1):

$$A_j = F_j \setminus F_{j-1} = F_j \cap F_{j-1}^c \quad j = 1, \ldots$$

$(F_0 = \emptyset)$

Observación:

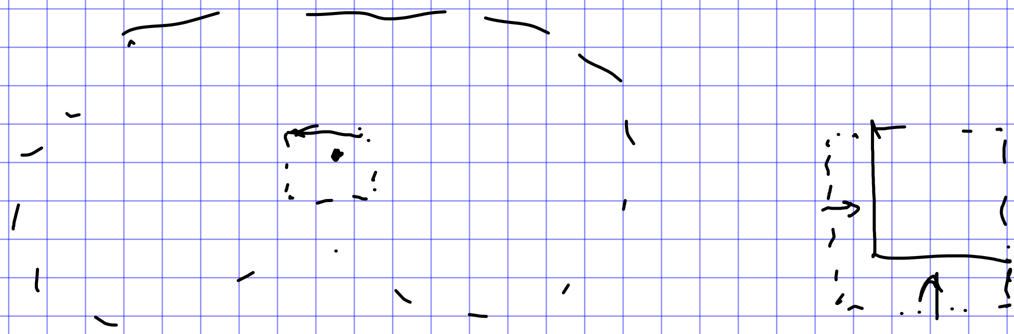
En $\mathbb{R}^n$ la familia más pequeña que queremos y sabemos medir es la de rectángulos:

$$\mathcal{E} = \left\{ \prod_{j=1}^n I_j \;\middle|\; I_j \subseteq \mathbb{R} \text{ intervalo} \right\}$$

$$\operatorname{vol}\left(\prod_{j=1}^n I_j \right) = \prod_{j=1}^n \ell(I_j)$$

Pero $\mathcal{E}$ no es σ-álgebra.

Tomando uniones numerables de $\prod_{j=1}^n I_j$ con I_j abiertos obtenemos todos los abiertos.



¿Qué σ-álgebra $\mathcal{A}$ nos conviene considerar a partir de $\mathcal{E}$?

Hemos visto que

$\mathcal{A}$ debe contener a todos los abiertos.

Como $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ debe contener a todos los cerrados.

Debe también contener

conjuntos G_δ: intersecciones numerables de abiertos conjuntos F_σ: uniones numerables de cerrados.

De aquí continuamos numerablemente.

Una mejor alternativa:

Definición:
X conjunto, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}$ es:

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap \left\{ \mathcal{A} \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathcal{A} \ \sigma\text{-álgebra} \\ \text{de } X,\ \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{M}(\mathcal{E})$ es la σ-álgebra más pequeña (por inclusión) que contiene a $\mathcal{E}$.

Lema:
En un conjunto X:

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F}) \implies \mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$$

Definición:

Si X es espacio topológico, entonces la σ-algebra generada por los abiertos se denota $\mathcal{B}_X$ y se llama la σ-álgebra de Borel, y sus elementos se llaman conjuntos de Borel.

Proposición:

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es generada por cualquiera de las siguientes familias:

1) $\{(a,b) \mid a<b\}$

2) $\{[a,b] \mid a<b\}$

3) $\{[a,b) \mid a<b\}$ ó $\{(a,b] \mid a<b\}$

4) $\{(a,+\infty) \mid a\in\mathbb{R}\}$ ó $\{(-\infty,a) \mid a\in\mathbb{R}\}$

5) $\{[a,+\infty) \mid a\in\mathbb{R}\}$ ó $\{(-\infty,a] \mid a\in\mathbb{R}\}$

Dem.:

Usar el lema junto con:

$$[a,b) = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \left(a-\frac{1}{j}, b\right)$$

$$(a,b) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \left(a, b-\frac{1}{j}\right]$$

//

Definición:

Si X es un conjunto y $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X, entonces:

$$(X, \mathcal{M})$$

se le llama espacio medible.

Ejemplos:

1) $(X, \mathcal{B}_X)$ con X espacio topológico.

2) $(X, \mathcal{P}(X))$

3) $(X, \{\emptyset, X\})$

4) X conjunto no numerable.

$$\mathcal{M} = \left\{ A \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ numerable ó} \\ A^c \text{ numerable} \end{array} \right\}$$

$(X, \mathcal{M})$ es espacio medible.

Definición:

Sea $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de espacios medibles.

La σ-álgebra producto en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es la σ-álgebra generada por:

$$\left\{ \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \;\middle|\; \begin{array}{l} E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \\ \alpha \in I \end{array} \right\}$$

con $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$

$(x_\alpha)_\alpha \longmapsto x_\beta$

y se denota $\bigotimes_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$.

Recordamos:

$$\pi_{\alpha_0}^{-1}(E_{\alpha_0}) = \cdots \times X_\alpha \times \cdots \times E_{\alpha_0} \times \cdots \times X_\beta \times \cdots$$