$\{(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ familia de σ-ál-gebras

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, ¿qué σ-álgebra es natural en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$?

Solución:

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}\left(\left\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \;\middle|\; \begin{array}{l}\alpha \in A\\ E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\end{array}\right\}\right)$$

Esta contiene:

$$\pi_{\alpha_0}^{-1}(E_{\alpha_0}) = E_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}} X_\alpha$$

$$\prod_{j=1}^{+\infty} E_{\alpha_j} \times \prod_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_j \mid j = 1, \dots\}} X_\alpha$$

$$E_{\alpha_j} \in \mathcal{M}_{\alpha_j} \qquad \alpha_j \neq \alpha_k \quad \forall j \neq k.$$

Por definición $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ es la σ-álgebra más pequeña tal que $\forall \alpha_0$ π_{α_0} cumple:

$$\pi_{\alpha_0}: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \longrightarrow X_{\alpha_0}$$

$$E \in \mathcal{M}_{\alpha_0} \Rightarrow \pi_{\alpha_0}^{-1}(E) \in \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$$

De lo anterior se deduce:

Proposición:
Sean $\{(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ espacios medibles con A numerable. Entonces:

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}\left(\left\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha \,\middle|\, E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \ \forall \alpha\right\}\right)$$

Proposición:
Sean $\{(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ espacios medibles tales que:

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}(\mathcal{E}_\alpha) \quad \forall \alpha \in A$$

Sea:

$$\mathcal{F} = \left\{ \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha \in A \\ E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \end{array} \right\}$$

Entonces:

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}(\mathcal{F}).$$

Demostración:

por la definición de $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ es claro que:

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subseteq \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$$

$$\left\{ \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha \in A \\ E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \end{array} \right\}$$

$\forall \alpha_0 \in A$ sea:

$$\left\{ E \in \mathcal{M}_{\alpha_0} \,\middle|\, \pi_{\alpha_0}^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}) \right\} = \mathcal{M}_\alpha'$$

la cual es fácil ver que es σ-álgebra.

$\phi, X_{\alpha_0} \in \mathcal{M}'_\alpha$ ✓

$E \in \mathcal{M}'_{\alpha_0} \Rightarrow \pi_{\alpha_0}^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

$\Rightarrow \pi_{\alpha_0}^{-1}(E^c) = \pi_\alpha^{-1}(E)^c \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

$\Rightarrow E^c \in \mathcal{M}'_\alpha$

y además $\mathcal{E}_{\alpha_0} \subseteq \mathcal{M}'_{\alpha_0}$; $\forall \alpha_0 \in A$.

$\Rightarrow \mathcal{M}_{\alpha_0} = \mathcal{M}(\mathcal{E}_{\alpha_0}) \subseteq \mathcal{M}'_{\alpha_0} \quad \forall \alpha_0$

Luego si $E \in \mathcal{M}_{\alpha_0}$ entonces:

$\pi_{\alpha_0}^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

son los generadores de $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$

$\Rightarrow \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$ //

Proposición:

Sea $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ espacios métricos y sea:

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j$$

$$d(x, y) = \max_{j=1,\ldots,n} \{ d_j(x_j, y_j) \}$$

el espacio métrico producto

Entonces:

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j} \subseteq \mathcal{B}_X \qquad (1)$$

Si cada X_j es separable entonces

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X . \qquad (2)$$

Dem.:

$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$ es generada por:

$$U_1 \times \dots \times U_n$$

con $U_j \subseteq X_j$ abierto y tales

$$U_1 \times \dots \times U_n \in \mathcal{B}_X$$

y eso prueba (1).

Si $U \subseteq X$ es abierto entonces $\exists\, (x_\alpha)_{\alpha \in I}$, $r_\alpha > 0$, $\alpha \in I$ tales que:

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} B(x_\alpha, r_\alpha)$$

$$= \bigcup_{\alpha \in I} \underbrace{\prod_{j=1}^{n} B_j((x_\alpha)_j, r_\alpha)}_{\text{en } \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}}$$

Si cada X_j es separable con $E_j \subseteq X_j$ denso numerable entonces

$$F = \prod_{j=1}^{n} E_j$$

es denso numerable en X y $\exists\ C \subseteq F \ni \forall x \in C\ \exists r_x > 0$ que satisface:

$$U = \bigcup_{x \in C} B(x, r_x)$$

$$= \bigcup_{x \in C} \prod_{j=1}^{n} B_j(x_j, r_x) \in \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$$

$$\therefore \quad \mathcal{B}_X \subseteq \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$$

//

Corolario:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Obs.:

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \{0, 1\} \underset{\text{biyección}}{\simeq} [0, 1]$$

Definición:

Si X es conjunto, entonces $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice familia elemental si cumple:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{E}$

2) $E, F \in \mathcal{E} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{E}$

3) $E \in \mathcal{E} \Rightarrow E^c = \bigcup_{j=1}^{\ell} A_j$ con $A_j \in \mathcal{E}$ disjuntos.

Ejemplo:

En $\mathbb{R}^n$ la familia de conjuntos:

$$\mathcal{E} = \left\{ \prod_{j=1}^{n} I_j \;\middle|\; \begin{array}{c} I_j \subseteq \mathbb{R} \text{ intervalo} \\ \forall j \end{array} \right\}$$

es una familia elemental.

Se usa que:

$$\left(\prod_{j=1}^{n} I_j\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{R} \times \dots \times \underbrace{I_k^c}_{\text{posición } k} \times \dots \times \mathbb{R}$$

Proposición:
Si $\mathcal{E}$ es familia elemental de un conjunto X, entonces:

$$\mathcal{A} = \text{uniones disjuntas finitas de elementos de } \mathcal{E}$$

es un álgebra.